PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 16. 15. August 1907. 8. Jahrgang.
Redaktionsschluß für No. 17 am 19. August 1907.

INHALT.

Originalmitteilungen:

W. Ramsay, Über Radiumemanation. S. 521.

F. Paschen, Über die absolute Messung des Zeeman-Effektes. S. 522.

R. Gans, Ein Étalon für variable magnetische Feldstärken. S. 523.

Th. Wulf, Ein neues Elektrometer für statische Ladungen, II. S. 527.

Mitteilungen aus dem physikalischen Institut der Universität Pisa.

No. 34 u. 35: A. Battelli, Theoretische und experimentelle Untersuchungen über den elektrischen Leitungswiderstand der Solenoide für Ströme hoher Frequenz, II. u. III. S. 530 u. 533.

R. Reiger, Über die Elastizität von Gelatinelösungen und eine Methode zur Bestimmung der Koagulationsgeschwindigkeit. S. 537.

Vorträge und Reden:

H. A. Lorentz, Das Licht und die Struktur der Materie. S. 542.

Besprechungen:

Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften V I, 2/4, II, 1. S. 549.

Deutscher Kamera-Almanach. III. S. 551.

A. Gleichen, Leitfaden der praktischen Optik. S. 551.

W. Brüsch, Die Beleuchtungsarten der Gegenwart. S. 552.

J. J. van Laar, Das thermodynamische Potential. S. 552.

Personalien. S. 552.

Gesuche. S. 552.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über Radiumemanation.

(Kurze vorläufige Mitteilung.) [1])

Von Sir William Ramsay.

Im Jahre 1903 haben Soddy und ich gezeigt, daß die spontane Umwandlung der Radiumemanation Helium liefert; diese Beobachtung ist seither von Himstedt und G. Meyer, von Giesel, von Indrikson, von Debierne und von Curie und Dewar bestätigt worden. Debierne hat gezeigt, daß Aktiniumchlorid gleichfalls Helium entwickelt. Ich konnte auch einmal Helium in den Gasen, die beständig aus Thoriumnitratlösung entweichen, nachweisen und ich hoffe, diese Beobachtung bald nochmals endgültig überprüfen zu können.

Ich habe nun gefunden, daß, wenn Radiumemanation in Kontakt mit Wasser bleibt oder darin gelöst ist, das inaktive Gas, das sich durch die Umwandlung der Emanation bildet, hauptsächlich aus Neon besteht; daneben war nur eine Spur von Helium zu entdecken.

Nimmt man statt Wasser eine gesättigte Kupfersulfatlösung, so wird wieder kein Helium gebildet; das Hauptprodukt der Umwandlung der Emanation ist in diesem Fall Argon, das vielleicht auch eine Spur Neon enthalten mag. — Fällt man nun aus der Kupfersulfatlösung, die in Kontakt mit Emanation war, das Kupfer auf übliche Weise heraus, so zeigt das eingedampfte Filtrat die Spektra von Natrium und von Calcium; daneben wurde sehr schwach, aber deutlich die rote Lithiumlinie beobachtet. Diese letztere Beobachtung wurde viermal gemacht, in zwei Versuchsreihen mit Kupfersulfat und in zweien mit Kupfernitrat. Natürlich wurden alle erdenklichen Vorsichtsmaßregeln angewandt. Analoge Rückstände von der Behandlung von Bleinitratlösung oder von Wasser mit Emanation zeigten kein Anzeichen der Gegenwart von Lithium. Auch bei einem blinden Versuch, wobei eine Lösung von Kupfernitrat vollkommen und in jeder Beziehung so behandelt wurde wie in den eigentlichen Versuchen, nur daß sie nicht mit Emanation in Berührung gebracht wurde, zeigte sich keine Spur von Lithium.

Diese interessanten Resultate könnten vielleicht so gedeutet werden: Nach der chemischen Inaktivität und nach dem Spektrum zu schließen, ist es sehr wahrscheinlich, daß die Radiumemanation in die Heliumgruppe des periodischen Systems gehört. Während ihrer spontanen Umwandlung gibt die Emanation eine verhältnismäßig ungeheure Energiemenge ab. Es scheint nun, als ob die Richtung, nach welcher diese Energie ausgegeben wird, von den Umständen abhängt. Ist die Emanation allein vorhanden, oder nur in Berührung mit Wasserstoff und Sauerstoff, so wird ein Teil der Emanation „zersetzt" oder umgewandelt durch die Energie, die der Rest der Emanation abgibt. Das gasförmige Produkt in diesem Fall ist Helium. Wird aber nun die Energieverteilung durch die Gegenwart von Wasser geändert, so liefert der Teil der Emanation, der „zersetzt" wird, Neon, oder wenn außerdem auch noch Kupfersulfat zugegen ist, Argon. — Ähnlich wird Kupfer durch die Energie Emanation „degradiert", zerteilt zu dem ersten Element dieser Gruppe des periodischen Systems, zu Lithium.

Ob bei der Einwirkung von Emanation auf Kupfer außer Lithium auch Natrium und Kalium gebildet werden, läßt sich vorerst noch nicht beweisen, da sowohl Natrium als Kalium im Glas des verwendeten Gefäßes enthalten waren; aber nach der Analogie mit den Zersetzungsprodukten der Emanation zu schließen,

1) Nach einem Brief an „Nature".

dürften bei der Zersetzung von Kupfer wohl auch *Na* und *K* entstehen.

Ein ausführlicher Bericht über diese Versuche soll in Kürze im „Journal of Chem. Society" erscheinen.

London, 11. Juli 1907.

(Übersetzt von O. Brill.)

(Eingegangen 29. Juli 1907.)

Über die absolute Messung des Zeeman-Effektes.

Von F. Paschen.

Die Herren P. Weiß und A. Cotton[1]) veröffentlichen eine exakte Bestimmung der magnetischen Aufspaltung $K = \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2 H}$ dreier Zinklinien, welche genauer ist als alle früheren Bestimmungen einschließlich der bisher exaktesten Messung von A. Färber[2]), deren Unsicherheiten sie richtig hervorheben.

Ich möchte im folgenden kurz die Resultate gleicher Untersuchungen angeben, welche vor 2 Jahren im physikalischen Institute der Universität Tübingen auf meine Veranlassung von Frl. Anna Stettenheimer begonnen und seitdem zu Ende geführt wurden, und welche mir noch etwas genauer zu sein scheinen, als die Resultate von Weiss und Cotton. Letztere geben als Fehler ihres Resultates 1 Proz. an. Die Zahlenwerte, S. 15, welche unter sich um 2 Proz. differieren, würden aber einen größeren Fehler nicht unmöglich erscheinen lassen.

Die Hauptschwierigkeit scheint in der absoluten Messung des magnetischen Feldes eines Elektromagneten zu liegen, deren bisherige Fehler wohl stark unterschätzt wurden. Die hier verwendete Methode der Feldbestimmung führt zunächst das Feld im Inneren einer Galvanometerspule[3]) von der Stärke 600 Gauß durch eine exakte Differentialmethode zurück auf das Feld im Zentrum eines Kreisstromes von großem Radius, dessen Stärke etwa 1 Gauß betrug. Mit Hilfe des Spulenfeldes von 600 Gauß wird das Feld im Schlitze eines magnetischen Kreises (magnetisches Etalon, für diesen Zweck angegeben und ausgearbeitet von Herrn R. Gans) von der Größe 3000 bis 10 000 Gauß bestimmt. Auch dieses Feld ist wie das Spulenfeld bis auf wenige Promille sicher gestellt. Schließlich wird das Feld des Elektromagnetes verglichen mit dem des Etalons. Der Fehler des Elektromagnetfeldes erreicht im ungünstigsten Falle (bei Summation der Fehler aller Schritte) 8 Promille, ist aber wahrscheinlich kleiner. Alle Feldvergleichungen geschahen ballistisch mit Galvanometern, deren Ausschläge streng proportional den Elektrizitätsmengen justiert waren, mit verschiedenen kleinen Spulen. Mehrere unabhängig voneinander bestimmte Galvanometerspulen[1]) ergeben die gleichen Endwerte.

Die optische Anordnung bestand in einem Rowlandschen Gitter größter Art wie bei Färber.

Die Resultate sind folgende:

	$K = \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2 H} \times 10^4$	
H	*Cd* 4678,339	*Zn* 4680,319
9970	1,899	1,901
10050	1,892	1,893
10210	1,905	1,899
23270	1,899	1,912
23345	1,895	1,903
23420	1,906	1,906
23640	1,906	1,910
31700	1,897	1,904
31720	1,892	1,893
32010	1,899	1,900
34910	1,908	1,907
Mi.	1,899	1,903

Mi. F. der Mittelwerte 1 Promille, größtmöglicher Fehler im ungünstigsten Falle, bei Summation sämtlicher Fehlerbeträge: 11 Promille.

Färber	Weiß u. Cotton
$K = 1{,}813$	$1{,}875$

A. Stettenheimer

$K = 1{,}901$

Die Konstante $K = 1{,}901$ gilt weiter für die gleichen Linien nach Versuchen des Herrn P. Gmelin, der direkt mit den Etalons und einem Echelon arbeitete, bis herunter zu 3500 Gauß. Zwischen 3500 Gauß und 35 000 Gauß ist somit die Proportionalität der Aufspaltung $\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$ mit dem Felde H bewiesen.

Nach den Gesetzmäßigkeiten von C. Runge und F. Paschen und C. Runge[2]) ist die Aufspaltung der Linien *Zn* 4680 und *Cd* 4678 die zweifache der von C. Runge als „normale Triplets" bezeichneten Linien. Es ergeben sich demnach für die „normalen Triplets" Runges nach der Formel: $\frac{e}{m} = 2\pi\nu K$ der Lorentzschen Theorie:

Weiß u. Cotton	A. Stettenheimer
$\frac{e}{m}$ $1{,}767 \times 10^7$	$1{,}791 \times 10^7\ \mathrm{cm^{+1/2}\,gr^{-1/2}}$

Es bleibt die Frage, ob auf diese „nor-

1) P. Weiß und A. Cotton, Journal de Physique Juin 1907.

2) A. Färber, Dissertation Tübingen, 1902; Ann. d. Phys. **9**, 886, 1902.

3) F. Paschen, diese Zeitschr. **6**, 371, 1905.

1) F. Paschen, diese Zeitschr. **6**, 371, 1905.

2) C. Runge, diese Zeitschr. **8**, 232, 1907.

malen Triplets" die Theorie von Lorentz anwendbar ist, oder ob auch für sie diese Theorie versagt wie bei den Serienlinien: d. h. ob ihr Wert $\frac{e}{m}$ vergleichbar mit den Werten $\frac{e}{m}$ der Kathodenstrahlen ist, denen er ja zum Mindesten sehr nahe kommt. Die Beantwortung dieser Frage wird erschwert durch die Unsicherheit, welche betreffs des Wertes $\frac{e}{m}$ infolge der sehr verschiedenen Resultate verschiedener Kathodenstrahlmessungen zu bestehen scheint. Sind die Resultate von Kaufmann, Simon und Seitz richtig, deren Wert für kleine Geschwindigkeit $\frac{e}{m} = 1{,}88 \times 10^7$ ist, so ist es nach den Messungen von Frl. Stettenheimer sicher, daß Runges normale Triplets einem anderen Wert $\frac{e}{m}$ entsprechen. Mir scheint dies der Fall zu sein. Nimmt man dagegen die Resultate anderer Kathodenstrahlmessungen dazu, nach denen $\frac{e}{m}$ kleiner ist (bis $1{,}7 \times 10^7$), so ist keine Verschiedenheit zu konstatieren.

(Eingegangen 24. Juli 1907.)

Ein Étalon für variable magnetische Feldstärken.[1]

Von R. Gans.

Bei allen Messungen, bei denen es auf die genaue Kenntnis eines Magnetfeldes ankommt, ist es wünschenswert, mühelos ein bekanntes Feld reproduzieren zu können, damit man nicht gezwungen ist, immer wieder eine absolute magnetische Messung zu machen.

Kann man ein Magnetfeld in der Sammlung aufbewahren, genau so, wie man einen Widerstand, eine Selbstinduktion etc. aufbewahrt, so ist man in der Lage, in diesem Normalmagnetfelde Messungen anzustellen oder ein unbekanntes Feld mit dem Normalfelde zu vergleichen. Untersuchungen über das Zeeman-Phänomen, magneto-optische Erscheinungen, galvanomagnetische Effekte sowie elektrotechnische Messungen werden mit Benutzung eines solchen Étalons einfacher anzustellen sein, und es steht zu erwarten, daß die Resultate verschiedener Beobachter dann eine bessere Übereinstimmung zeigen werden, da zweifellos bei diesen Messungen die bis jetzt vorhandenen Abweichungen z. T. auf falsch gemessene Magnetfelder zurückzuführen sind.

1) D. R. P. 188769.

Durch wechselseitige Induktionsnormalien, wie sie von Siemens & Halske in den Handel gebracht werden, kann man die ballistische Empfindlichkeit eines Galvanometers bestimmen. Verbindet man eine kleine Induktionsspule mit dem so geeichten Galvanometer und zieht dieselbe aus dem Normalfelde heraus, so ergibt sich aus dem Induktionsausschlag die Windungsfläche der Spule in absolutem Maß, eine Größe, deren Kenntnis für viele magnetische Messungen erwünscht ist. Ich glaube, es würde von Physikern und Technikern begrüßt werden, wenn man einen Satz so geeichter Meßspulen neben den wechselseitigen Induktionsnormalien in den Handel brächte.

Die Bedürfnisfrage eines magnetischen Feldétalons ist also zu bejahen. Es existieren nun auch in manchen Instituten einmal geeichte, eisenfreie Stromspulen, deren Feld für einen gemessenen Strom jederzeit reproduzierbar ist, und da wir heutzutage z. B. mit einem Siemens & Halskeschen Präzisionsmilliampèremeter in der Lage sind, elektrische Ströme genau zu reproduzieren, so läßt sich — die Unveränderlichkeit der Spule vorausgesetzt — tatsächlich ein Magnetfeld so aufbewahren.

Eine solche eisenfreie Spule hat die Vorteile, daß das Feld genau proportional dem Strom ist, und daß keine hysteretischen Eigenschaften vorhanden sind, aber sie hat die Nachteile, daß das Feld nicht allzu kräftig sein kann, und daß es nur in kleinen räumlichen Bereichen homogen ist, resp. daß der homogene Teil des Feldes dem Experimentator schwer zugänglich ist.

Im Schlitze eines geschlitzten Eisenringes läßt sich nun ein Feld herstellen, welches infolge der hohen Permeabilität des Ferromagnetikums wesentlich kräftiger und zugleich räumlich homogener, dabei aber doch bequem zugänglich ist. Dagegen ist das Feld im Schlitz wegen der Krümmung der Magnetisierungskurve nicht dem magnetisierenden Strom proportional, und es tritt Hysteresis auf.

Es handelt sich darum, die Anordnung so zu treffen, daß die Vorteile des geschlitzten Eisenrings (große Feldstärke, räumlich homogenes Feld, leichte Zugänglichkeit des Feldes) mit denen der eisenlosen Spulen (Fehlen der Hysteresis, Proportionalität zwischen Strom und Feld) vereinigt werden.

Die Hysteresis läßt sich durch ein bestimmt vorgeschriebenes Ein- und Ausschalteverfahren eliminieren. Beim Einschalten gehe man z. B. auf der jungfräulichen Kurve langsam vom Nullpunkt aufwärts, beim Ausschalten wende man abnehmende Kommutierungen an, d. h. man schwäche den Strom kontinuierlich und kommutiere dabei andauernd seine Richtung. Ist er ganz ausgeschaltet, so ist bekanntlich

der jungfräuliche Zustand des Ferromagnetikums wiederhergestellt.

Folgendermaßen kann man Proportionalität zwischen Strom und Feld erreichen. Die $\mathfrak{B}$,$\mathfrak{H}$-Kurve ist so gekrümmt, daß man vom Koordinatenursprung eine Tangente an die Kurve legen kann, die in P_0 (vgl. Fig. 1) berührt. Zu P_0 gehört das Feld $\mathfrak{H}_0$. Offenbar ist P_0 die Stelle der Kurve, an der $\mu = \mathfrak{B}/\mathfrak{H}$ seinen Maximalwert hat, denn die Verbindungslinie OP eines beliebigen Kurvenpunktes schließt einen Winkel mit der $\mathfrak{H}$-Achse ein, dessen Tangente gleich μ ist, und da OP_0 die steilste Lage ist, welche eine Gerade OP haben kann, so haben wir bei $\mathfrak{H}_0$ die Maximalpermeabilität.

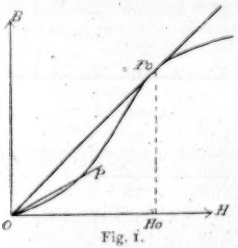

Fig. 1.

In der Nähe von P_0 läßt sich nun die Kurve durch die Tangente OP_0 ersetzen, in der Nähe von $\mathfrak{H}_0$ ist also

$$\mathfrak{B} = \mu_{max} \cdot \mathfrak{H} \qquad (1)$$

Der Feldstärkenbereich, in dem die wirkliche Magnetisierungskurve durch (1) ersetzt werden darf, hängt von der noch statthaften Abweichung von der Proportionalität ab. Sind z. B. Fehler von 0,5 % noch erlaubt, so kann man natürlich (1) in einem größeren Intervall anwenden, als wenn der Fehler 0,2 Proz. nicht überschreiten darf. Bei gegebenem statthaften Fehler hängt dieser Feldbereich aber wesentlich davon ab, wie eng die Kurve sich an die Tangente anschmiegt. Ein Material, dessen μ, $\mathfrak{H}$-Kurve ein sehr flaches Maximum hat, ist in dieser Beziehung besonders günstig.

Dadurch, daß man in der Nähe des Maximalwertes von μ sich befindet, hat man den weiteren Vorteil, daß infolge der hohen Permeabilitätswerte die Streuung sehr klein und gleichzeitig $\mathfrak{B}$ bei vorgeschriebenem $\mathfrak{H}$ möglichst groß wird, daß man also unter den gegebenen Bedingungen so günstig wie möglich arbeitet.

Nun werden die Verhältnisse aber durch die Entmagnetisierung, die infolge des Luftschlitzes vorhanden ist, noch wesentlich verbessert. Wir wünschen nämlich nicht Proportionalität zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ im Eisen, sondern zwischen $\mathfrak{B}$ und dem Strom i, oder was dasselbe ist, zwischen $\mathfrak{B}$ und H, wenn H das äußere Feld bezeichnet, d. h. das Feld, welches vorhanden wäre, wenn kein Eisen zwischen den Windungen sich befände. Bei einem gleichmäßig bewickelten Toroid ist also $H = 4\pi in$.

Um den Einfluß des Schlitzes auf den Proportionalitätsbereich übersehen zu können, nehmen wir ein geschlitztes Toroid von überall gleichem Querschnitt an. Sehen wir von der Streuung ab, so ist das Feld überall gleichförmig, wir können von einer Entmagnetisierung sprechen, und es gilt

$$\mathfrak{H} = H - \mathfrak{M}N \qquad (2)$$

Hier bedeutet $\mathfrak{H}$ das wirkliche, H das äußere Feld,

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{H}}{4\pi} \qquad (3)$$

die Magnetisierung, N den Entmagnetisierungskoeffizienten. Für unser Toroid ist z. B.

$$N = 4\pi \frac{l_a}{l_i + l_a} \qquad (4)$$

wo l_i die Länge der Kraftlinien im Eisen, l_a die Länge im Schlitz bedeutet. Aus (2) und (3) folgt

$$H = \mathfrak{H}(1-\gamma) + \mathfrak{B}\gamma, \qquad (5)$$

wo zur Abkürzung γ anstatt $\frac{N}{4\pi}$ gesetzt ist.

Nun sei

$$\mathfrak{B} = \varphi(\mathfrak{H}) \qquad (6)$$

die Gleichung der $\mathfrak{B}$,$\mathfrak{H}$-Kurve. In der Nähe des Feldes $\mathfrak{H}_0$, für welches die Permeabilität ihren Maximalwert hat, läßt sich (6) ersetzen durch

$$\mathfrak{B} = a\mathfrak{H} - b(\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0)^2 = a\mathfrak{H}_0 + a(\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0) - b(\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0)^2. \qquad (7)$$

wo a die Maximalpermeabilität bedeutet und b von der Krümmung der Kurve in P_0 abhängt.

Andererseits ist

$$\mathfrak{B} = \Phi(H) = \Phi[\mathfrak{H}(1-\gamma) + \mathfrak{B}\gamma] \qquad (8)$$

Für $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0$ folgt aus (5) und (7)

$$H_0 = (1 - \gamma + a\gamma)\mathfrak{H}_0 \qquad (9)$$

Entwickelt man (8) nach Potenzen von $H - H_0$ so folgt

$$\mathfrak{B} = A_0 + A_1(H - H_0) + A_2(H - H_0)^2 \qquad (10)$$

Aus (5) ergibt sich aber mit Benutzung von (7)

$$H - H_0 = (1-\gamma)(\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0) + \gamma(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_0) = (1 - \gamma + a\gamma)(\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0) - b\gamma(\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0)^2 \qquad (11)$$

Setzt man (11) in (10) ein, so erhält man

$$\mathfrak{B} = A_0 + A_1(1 - \gamma + a\gamma)(\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0) + [A_2(1 - \gamma + a\gamma)^2 - A_1 b\gamma](\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0)^2 \qquad (12)$$

Der Vergleich gleicher Potenzen von $\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0$ in (7) und (12) ergibt

$$A_0 = a\mathfrak{H}_0 \left[= \frac{a}{1 - \gamma + a\gamma} H_0 \text{ wegen (9)}\right]$$

$$A_1 = \frac{a}{1-\gamma+a\gamma}$$

$$A_2 = -\frac{b(1-\gamma)}{(1-\gamma+a\gamma)^3},$$

so daß aus (10) wird

$$\mathfrak{B} = \frac{a}{1-\gamma+a\gamma} H - \frac{b(1-\gamma)}{(1-\gamma+a\gamma)^3}(H-H_0)^2 \quad (14)$$

Nehmen wir an, es seien in (7) und (14) gleiche relative Abweichungen von der Proportionalität statthaft, so ist diese relative Abweichung ε wegen (7) und (14)

$$\frac{b(\mathfrak{H}-\mathfrak{H}_0)^2}{a\mathfrak{H}_0} = \frac{b(1-\gamma)(H-H_0)^2}{(1-\gamma+a\gamma)^2 a H_0} = \varepsilon \quad (15)$$

oder, was dasselbe ist, es muß sein

$$\left(\frac{\mathfrak{H}-\mathfrak{H}_0}{\mathfrak{H}_0}\right)^2 \mathfrak{H}_0 = \frac{1-\gamma}{(1-\gamma+a\gamma)^2}\left(\frac{H-H_0}{H_0}\right)^2 H_0$$

d. h. mit Benutzung von (9)

$$\frac{H-H_0}{H_0} = \sqrt{\frac{1-\gamma+a\gamma}{1-\gamma}}\,\frac{\mathfrak{H}-\mathfrak{H}_0}{\mathfrak{H}_0} = \sqrt{\frac{1-\gamma+a\gamma}{1-\gamma}}\sqrt{\varepsilon\frac{a}{b\mathfrak{H}_0}} \quad (16)$$

Die Größen $\frac{H-H_0}{H_0}$ resp. $\frac{\mathfrak{H}-\mathfrak{H}_0}{\mathfrak{H}_0}$ sind maßgebend für den relativen Feldbereich, der sich bei vorgeschriebener Abweichung von der Proportionalität ergibt; auf diesen kommt es praktisch an, denn es interessiert nur, in welchem Verhältnis man bei einem Étalon die Felder verändern kann.

Setzen wir wieder für a μ_{max}, für γ $\frac{N}{4\pi}$ so folgt

$$\frac{H-H_0}{H_0} = \sqrt{\frac{1+K_{max}N}{1-\frac{N}{4\pi}}}\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\frac{\mu_{max}}{b\mathfrak{H}_0}} \quad (17)$$

Hieraus läßt sich bei bekannter Magnetisierungskurve und vorgeschriebener Abweichung ε von der Proportionalität der relative Proportionalitätsbereich berechnen. (K_{max} bedeutet $(\mu_{max}-1)/4\pi$).

Man sieht, daß der Proportionalitätsbereich möglichst groß wird, wenn die Permeabilitätskurve ein hohes, aber flaches Maximum bei einer kleinen Feldstärke hat (a groß, b klein, $\mathfrak{H}_0$ klein), und wenn der Schlitz nicht zu eng ist (N groß).

Zwar wird mit einer Erweiterung des Schlitzes immer ein Anwachsen der Ampère-Windungen wegen der größeren Entmagnetisierung Hand in Hand gehen müssen, aber nicht zu enge Schlitze haben erstens den Vorteil, daß man in ihnen besser experimentieren kann, zweitens aber folgt aus der Formel für ein geschlitztes Toroid

$$\mathfrak{B} = \frac{4\pi \text{ Amp.-Windungen}}{l_i/\mu + l_a},$$

daß eine Änderung von μ durch Temperaturschwankungen oder durch Veränderung des Materials im Laufe der Zeit um so weniger ausmacht, je größer l_a ist. Tatsächlich ist der Temperatureinfluß vollständig zu vernachlässigen.

Étalon No. 1.

Aus kohlenstoffreichem, gut ausgeglühtem Schmiedeeisen ließ ich mir einen Ring biegen, dessen Dimensionen folgende waren (vergl. Fig. 2)

$l_i = 62{,}1$ cm
$l_a = 0{,}605$ cm
$2r = 4{,}885$ cm

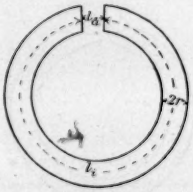

Fig. 2.

Die Windungszahl betrug 714; der Draht hatte 1 mm Durchmesser. Die Wickelung wurde mit Leinenband umwickelt und mit dicker Schellacklösung getränkt, sodaß dieselbe unverrückbar fest lag.

Die Stellung dieses Étalons gegen das Erdfeld war von keinem merkbaren Einfluß; da aber bei den später konstruierten Étalons mit verjüngten Polschuhen ein solcher Einfluß bemerkbar war, wurden die Étalons bei der Eichung stets so aufgestellt, daß die magnetische Meridianebene parallel der Stirnflächen verlief. In jeder anderen Stellung ist eine Korrektion nötig, die sich durch Umschalten des Stroms ergibt.

Die Eichung ergab, daß bis auf Abweichungen von 0,5 Proz. höchstens Proportionalität zwischen 1,5 und 2,4 Amp. vorhanden war. In diesem Bereich gilt

$$\mathfrak{H}\,(\text{Gauß}) = 1348\,\mathcal{J}\,(\text{Amp.}).$$

Dieses Étalon hat sich jedoch nicht so gut bewährt, wie die im folgenden zu beschreibenden; es stellte sich nämlich heraus, daß die Konstante um 1 Proz. veränderlich war, je nachdem man den Strom in der einen oder anderen Richtung hindurchschickte. Diese Verschiedenheit ist unabhängig davon, wie das Étalon gegen den Meridian orientiert ist. Da

ich den Grund der Verschiedenheit nicht anzugeben vermag, wird dieses Étalon nicht benutzt. Vermutlich wird es von Einfluß sein, daß bei diesem Étalon im Gegensatz zu den später konstruierten der Querschnitt an allen Stellen konstant ist.

Étalon No. 2.

Aus demselben Material wurde ein zweites Étalon mit denselben Abmessungen hergestellt, dessen Querschnitt sich nach den Stirnflächen hin verjüngte (Fig. 3), so daß die Stirnflächen einen Kreis von 15 mm Durchmesser bildeten. Auf diesen Kern wurden ungefähr 1000 Windungen gewickelt, und zwar wurde der durch das konische Zulaufen gewonnene Windungsraum (in Fig. 3 punktiert umgrenzt) vollständig mit Windungen angefüllt, sodaß das fertig gewickelte Étalon genau den Eindruck eines einfach ringförmigen nach Art von Étalon No. 1 machte.

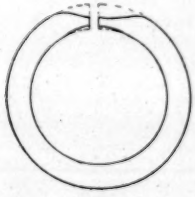

Fig. 3.

Das Zuspitzen bewirkte in den Schlitzen ein größeres Feld; durch das Bewickeln des punktiert begrenzten Raumes erreicht man, daß die Streuung viel geringer und infolgedessen das Feld im Schlitz homogener wird.

Der Proportionalitätsbereich liegt zwischen 1,6 und 2,9 Amp. In diesem Bereich ist

$$\mathfrak{H}\,(\text{Gauß}) = 2356\,\mathcal{J}\,(\text{Amp}).$$

Dieser Wert wurde ein Jahr nach einer ersten Eichung gefunden, welche den Wert 2352 ergeben hatte.

Man sieht also, daß sich der Wert der Konstanten innerhalb eines Jahres trotz häufigen Gebrauchs nicht merklich verändert hat.

Étalon No. 3.

Ein drittes Étalon wurde aus einem weichen Gußstahl von Krupp verfertigt, dessen Magnetisierungskurve besonders gute Verhältnisse versprach, aus demselben Material, aus welchem das Schlußjoch der Reichsanstalt gegossen ist. Die Dimensionen ergeben sich aus Fig. 4. Die Zahl der Windungen beträgt 1700. Proportionalität findet statt zwischen 1,0 und 3,0 Amp., in diesem Bereich ist

$$\mathfrak{H}\,(\text{Gauß}) = 3496\,\mathcal{J}\,(\text{Amp.}).$$

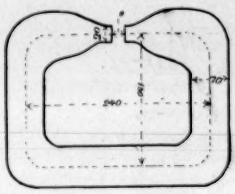

Fig. 4.

Um ein Bild von den Abweichungen von der Proportonalität zu geben, seien die ballistischen Ausschläge e mitgeteilt, welche bei den magnetisierenden Strömen i durch Herausziehen einer Meßspule aus dem Schlitz gewonnen wurden, und zwar wurde in Tabelle 1 der Strom in der einen, in Tabelle 2 in der anderen Richtung durch die Wickelung geschickt.

Tabelle 1.

i (Amp.)	e	e/i
1,023	61,15	59,78
1,408	84,25	59,85
2,030	121,7	59,94
2,534	152,0	59,98
2,982	178,0	59,85
	Mittel	59,88

Tabelle 2.

i (Amp.)	e	e/i
1,072	63,95	59,73
1,510	90,2	59,92
2,034	121,9	60,08
2,580	155,0	59,84
2,966	177,5	59,65
	Mittel	59,84

Gesamtmittel 59,86

Die e sind jedesmal die Mittel aus zwei Ausschlägen. Dadurch, daß die Mittel der Werte e/i genommen sind, ersetzt man die Kurve nicht durch ihre Tangente, sondern durch eine Sehne, wodurch der Proportionalitätsbereich noch erweitert wird.

Die absolute Eichung erfolgte auf ballistischem Wege durch Vergleich mit einer eisen-

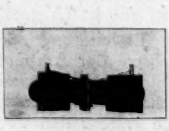

Fig. 5.

Fig. 6.

losen Spule, deren Feld von Hrn. Prof. Paschen nach einer von ihm angegebenen Methode[1]) mit Hilfe einer Tangentenbussole absolut bestimmt war.

Auf Grund der obigen Zahlen sieht man, daß die Meßbereiche folgende sind:

bei Etalon No. 1 zwischen 2020 und 3230 Gauß
" " " 2 " 3770 " 6830 "
" " " 3 " 3496 " 10488 "

Es zeigt sich also, daß Etalon No. 3 wesentlich am günstigsten arbeitet, nämlich bei einem Feldbereich, dessen Werte sich wie 1 : 3 verhalten. Dieser Bereich läßt sich durch andere Dimensionierung noch vergrößern.

Die Etalons sind im Tübinger physikalischen Institut bereits praktisch benutzt worden, und zwar wurden von Frl. Stettenheimer die Feldstärken eines sehr großen Elektromagneten, zwischen dessen Polen die magnetische Aufspaltung von Spektrallinien nach absolutem Maß gemessen wurde, ballistisch mit denen der Etalons verglichen, und ferner wurde von Herrn Gmelin der Zeeman-Effekt für kleinere Feldstärken nach absolutem Maß direkt im Schlitz der Etalons bestimmt.

1) F. Paschen, diese Zeitschr. **6**, 371, 1905; siehe auch E. Prümm, Tübinger Diss. S. 12, 1907.

Tübingen, 25. Juli 1907, Physikal. Institut.

(Eingegangen 2. August 1907.)

Ein neues Elektrometer für statische Ladungen.

Zweite Mitteilung.

Von Theod. Wulf.

In einer früheren Mitteilung[1]) beschrieb ich ein neues Fadenelektrometer, das an Empfindlichkeit in der Mitte steht zwischen dem Blättchenelektroskop und dem Quadrantelektrometer. Bei seinen zahlreichen ausgezeichneten Eigenschaften wird es gewiß häufig Verwendung finden. Für einige Fälle steht jedoch seiner Brauchbarkeit der Umstand entgegen, daß es auf positive und negative Ladungen in gleicher Weise anspricht. Will man zum Beispiel ein Stationsinstrument zur beständigen Aufzeichnung des Potentialgefälles der Luft, so braucht man notwendig einen Apparat, der auch das Vorzeichen des Gefälles unterscheidet. Oder wollte man die Form eines Wechselstromes mit dem Apparat aufnehmen, so würde immer der negative Kurvenzweig um die Nullinie nach oben umgelegt neben dem positiven gezeichnet werden. Es war deshalb von Anfang an mein Bemühen, den Apparat so einzurichten, daß er gegebenenfalls auch das Vorzeichen der Ladung mit verzeichnen könnte.

Ein zweiter Übelstand wurde mit dem ersten zugleich gehoben. Er besteht darin, daß die Empfindlichkeit für kleine Potentiale bedeutend geringer ist, so daß der Apparat für max. 250 Volt Spannungen unter 10 Volt nur mehr ungenau zu messen gestattet.

Die im folgenden beschriebene Anordnung hebt beide Mängel in sehr einfacher und vollkommner Weise.

1. Der Grundgedanke dieser Einrichtung ist folgender. Bringt man rechts und links neben den Fäden des einfachen Apparats je einen Hilfskonduktor CC (Fig. 1) an und ladet

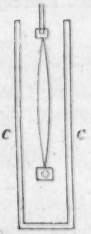

Fig. 1.

diese beiden zu demselben Potential $+V$, so geben die Fäden einen Ausschlag, auch wenn sie zur Erde abgeleitet sind. Denn zunächst wird auf den Fäden durch Induktion eine negative Ladung erzeugt. Diese Ladung befindet sich dann in einem elektrischen Feld, gebildet aus dem + geladenen Konduktor und dem — geladenen andern Faden. Unter dem Einfluß dieses Feldes müssen die Fäden sich nach außen ausbauchen. Bringt man dann die zu messende Ladung auf die Fäden, so wird eine negative Ladung den früheren Ausschlag vergrößern, eine positive wird ihn verkleinern. Die Ausschläge hängen natürlich von Gestalt, Lage und Potential der Hilfskonduktoren ab und man müßte in jedem einzelnen Fall den Apparat empirisch eichen. Indes hat die Untersuchung der hier obwaltenden quantitativen Beziehungen zu einer Anordnung geführt, bei der nur eine einzige Eichung erforderlich ist. Es kann demnach dieser Apparat gerade so gut wie der einfache mit einer Eichtabelle vom Fabrikanten geliefert werden, und diese Tabelle bleibt immer gültig, ob man nun den Hilfskonduktor zur Erde ableitet oder ob man ihn zu irgendeinem Potential ladet.

2. Theoretisches. Es bezeichne Q_1 die Ladung der Fäden, V_1 ihr Potential und c_1 ihre Kapazität; entsprechend gelte Q_2, V_2, c_2

1) Diese Zeitschrift **8**, 246—248, 1907.

für die Hilfskonduktoren. Da dieselben dauernd miteinander verbunden sind, können wir sie als einen Konduktor behandeln. Endlich sei c_{12} der Koeffizient der gegenseitigen Induktion. Dann ist nach Maxwell[1])

$$Q_1 = c_1 V_1 + c_{12} V_2, \quad (1)$$

$$Q_2 = c_{12} V_1 + c_2 V_2. \quad (2)$$

Wird bei konstantem Hilfspotential V_2 das Potential der Fäden V_1 um ∂V_1 vermehrt, so ist die dazu erforderliche Elektrizitätsmenge ∂Q_1 bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{\partial Q_1}{\partial V_1} = c_1 + V_1 \frac{\partial c_1}{\partial V_1} + V_2 \frac{\partial c_{12}}{\partial V_1}. \quad (3)$$

Zugleich wird der Quelle V_2 eine gewisse (positive oder negative) Ladung entnommen, für welche gilt

$$\frac{\partial Q_2}{\partial V_1} = c_{12} + V_1 \frac{\partial c_{12}}{\partial V_1} + V_2 \frac{\partial c_2}{\partial V_1}. \quad (4)$$

Für vollkommen starre Leiter sind c_1, c_2 und c_{12} konstant und gehen diese beiden Gleichungen über in

$$\frac{\partial Q_1}{\partial V_1} = c_1, \quad \frac{\partial Q_2}{\partial V_1} = c_{12}$$

und es ist wohl zu beachten, daß sie nicht bloß gelten für den Fall $V_2 = 0$, sondern allgemein für $V_2 = \text{const}$. Die zur Potentialerhöhung der Fäden notwendige Ladungsmenge ist (unabhängig vom Hilfspotential V_2) einfach der Potentialerhöhung proportional. Obwohl nun hier die Gestaltsänderung der beweglichen Teile sehr klein ist — für 100 Volt vergrößert sich der Abstand der Fäden in der Mitte um ca. 1 mm —, so zeigte doch der Versuch, daß diese Annahme namentlich beim Integrieren über den ganzen Bereich der Skala nicht statthaft ist; besonders für stark verschiedene Hilfsladungen erhält man merkliche Abweichungen. Den stärksten Änderungen ist im allgemeinen der Faktor c_{12} unterworfen. Denn c_1 ändert sich nur wegen der kleinen Gestaltsänderung der Fäden, c_{12} aber erstens ebenfalls wegen dieser Gestaltsänderung und zweitens besonders deshalb, weil die Fäden bei dem Ausschlag an Stellen höheren Potentials im Felde von Q_2 kommen, und diese Änderung wird je nach dem Abstand des Hilfskonduktors von den Fäden und dem Potential V_2 verschieden sein. Seinen höchsten Wert erlangt c_{12} für Punkte, an welchen das Feldpotential ebenfalls V_2 ist. Wenn man daher den Hilfskonduktoren eine solche Gestalt gibt, daß sie die Fäden, soweit dieselben beweglich sind, vollständig umschließen, so hat c_{12} von Anfang an seinen maximalen Wert und die Änderung von c_{12} ist ein Minimum, indem der zweite Umstand vollständig entfällt. In diesem Falle gilt der Satz, daß, wenn den Fäden die Ladung Q_1 zugeführt wird, auf dem geerdeten Konduktor eine gleich große Ladung entgegengesetzten Vorzeichens induziert wird. Es ist also für $V_2 = 0$

$$Q_1 = c_1 V_1 \text{ und } Q_2 = -Q_1 = c_{12} V_1,$$

folglich $c_{12} = -c_1$ und die Gleichung (1) geht über in

$$Q_1 = c_1 (V_1 - V_2). \quad (5)$$

Da sich nun die Fäden ganz im Innern eines Leiters befinden, so ist weiterhin klar, daß der Fadenausschlag gar nicht mehr von der Ladung der Konduktoren, sondern einzig von Q_1, der Ladung der Fäden abhängt. Ebenso ist c_1 die Kapazität, eine eindeutige Funktion des Ausschlags, mit dem sie ebenfalls langsam wächst. Folglich muß auch

$$V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{c_1}$$

eine eindeutige Funktion des Ausschlags sein. Man muß streng denselben Ausschlag erhalten, so oft nur die Differenz $V_1 - V_2$ denselben Wert hat. Wenn man daher den Apparat in Volt eicht, indem man etwa $V_2 = 0$ nimmt, so bleibt diese Eichkurve für alle Hilfsladungen $V_2 \lesseqgtr 0$ in der Weise richtig, daß das abgelesene Potential $\pm V$ gleich der Differenz $V_1 - V_2$ ist. Ist das Hilfspotential V_2 bekannt, so folgt einfach

$$V_1 = V_2 \pm V.$$

Welches der beiden Vorzeichen gegebenenfalls zu nehmen ist, davon überzeugt man sich leicht. Die Bestimmung von V_2 kann mit dem Apparat selbst erfolgen; indem man $V_1 = 0$ nimmt, gibt die Eichkurve sofort den Wert von V_2.

3. Die Einrichtung des Apparats war damit gegeben. Die Hilfskonduktoren mußten eine solche Gestalt bekommen, daß die Induktion auf die beweglichen Teile des Elektrometers vollständig war. Es wurde ein oben offener Zylinder gewählt, der nur in der Mitte zum Durchlassen des Lichtes zwei kleine Öffnungen hat. Damit man bei der Herstellung die Fäden gut ausrichten kann, ist der Zylinder der Länge nach in zwei Hälften gespalten. Werden dieselben zurückgeschoben, so sind die Fäden ihrer ganzen Ausdehnung nach frei gelegt. Die Befestigung der Zylinderhälften erfolgt ähnlich wie die der Schutzbacken im Blättchenelektroskop. Eine äußere Ansicht des vollständig zusammengesetzten Apparats zeigt Fig. 2. Das Mikroskop an der vorderen Gehäusewand ist auf einem Schlitten einige mm horizontal verschiebbar, damit man die Fäden in die Mitte des Gesichtsfeldes bringen kann. Ist die Einstellung einmal richtig gemacht, so darf man das Mikroskop später nicht mehr

1) Deutsch von Weinstein, Bd. 1, S. 106.

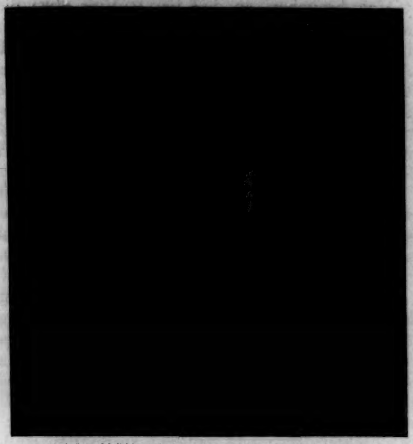

Fig. 2.

verschieben, sondern die Einstellung erfolgt nur noch mit den Fußschrauben des Apparats. An der Rückwand ist ein allseitig bewegliches Spiegelchen angebracht, welches das Licht in das Mikroskop wirft. Man stellt den Apparat am besten so auf, daß man beim Ablesen das Fenster zur Seite hat.

Der ganze obere runde Teil des Gehäuses kann bei trockener Witterung abgenommen werden; man hat dann die kleinste Kapazität. Bei feuchter Witterung wird er aufgesetzt, mit einem kleinen Glastubus versehen, der mit etwas Natrium beschickt ist.

Die Kapazität wird durch die Zylinderwände nur wenig vergrößert. In der definitiven Form haben die einfachen Apparate (entgegen der früheren Angabe) ohne Deckel und ohne Ladestift ca. 1,7 cm; die Apparate mit Hilfsladung 4,0 cm Kapazität.

Für die meisten Fälle wird daher die Kapazität des Meßapparats nur von der Größenordnung eines Korrektionsgliedes der übrigen Teile sein.

4. Die experimentelle Bestätigung der oben theoretisch abgeleiteten Folgerung enthält Fig. 3. Die Kurve ist gezeichnet zunächst blindlings nach den Angaben von Günther & Tegetmeyer, ohne Einzeichnung einzelner Punkte. Um zu prüfen, ob die Eichkurve sich durch die mannigfaltigen Stöße des Transports ändere, wurde dann eine Neueichung vorgenommen mittels einer Krügerschen Batterie[1]) von 100-

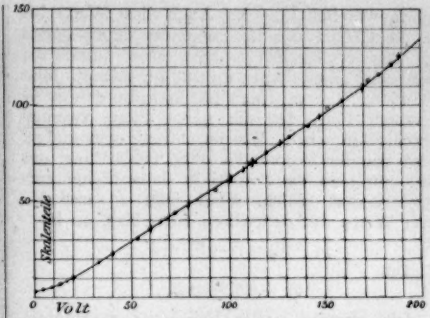

Fig. 3.

Normal-Weston-Elementen mit Ableitung von 10 zu 10 Volt. Für höhere Spannungen wurde eine Akkumulatorenbatterie dazu genommen. Die gefundenen Werte sind durch Punkte bezeichnet. Sie liegen alle sehr genau auf der Kurve, welche Günther & Tegetmeyer angegeben hatten.

Darauf wurde der Konduktor von Erde getrennt und mittels der Akkumulatorenbatterie auf $-112{,}7$ Volt geladen. Wurden die Fäden geerdet, so war $Q_1 = c_1 V_2$, der Ausschlag betrug 70,2 Strich, was nach der früheren Eichung 112,7 Volt entspricht. Der Punkt ist in der Kurve durch ein Kreuz bezeichnet. Dann wurden die Fäden mittels der Krügerschen Batterie zu positiven Potentialen geladen. Der frühere Ausschlag wurde vermehrt, denn

$$Q_1 = c_1 (V_1 + V_2).$$

Die Werte wurden eingezeichnet, indem man von dem Punkt $V_2 = 112{,}7$ Volt als Nullpunkt nach rechts weiterzählte. Man erhielt die geringelten Punkte; sie liegen ebenfalls genau auf der früheren Kurve.

Dann wurden die Fäden negativ geladen, wodurch der Ausschlag allmählich kleiner wurde. Die Punkte wurden eingezeichnet, indem von 112,7 Volt an die Volts rückwärts gezählt wurden. Umgekehrt hätte man hier V_1 ermittelt aus der abgelesenen Spannung V zu $V_1 = V - V_2$. Zum Beispiel ergab eine Ablesung 43,4 Strich, wofür die Kurve 72,5 Volt anzeigt. Daraus folgt

$$V_1 = 72{,}5 - 112{,}7 = -40{,}2 \text{ Volt.}$$

Es waren in der Tat 40 Weston-Elemente der Batterie angelegt.

Mit steigendem Potential V_1 nahm der Ausschlag immer mehr ab, bei $V_1 = V_2$ war $Q_1 = 0$, das Instrument in der Ruhelage.

Wurde dann V_1 noch weiter vergrößert, so nahm der Ausschlag wieder zu; bei $V_1 = 2V_2$ war wieder $Q_1 = c_1 V_2$, mit demselben Aus-

1) F. Krüger, diese Zeitschrift 7, 182—183, 1906.

schlag wie bei $V_1 = 0$. Auch diese Werte bis an die Grenze des Gesichtsfeldes liegen genau auf der ersten Kurve. Sie sind durch die senkrecht gestrichelten Punkte bezeichnet. Jetzt ist $V_1 = V_2 + V$. Man hat hier also den interessanten Fall, daß die ganze Skala zweimal durchlaufen wird. Das ist, streng genommen, auch bei den Apparaten ohne Hilfsladung der Fall, nur sind die Potentiale dann immer entgegengesetzt gleich. Sind jetzt V_1 und V_1' zwei Werte mit demselben Ausschlag, so ist

$$V_1 - V_2 = -(V_1' - V_2),$$

folglich

$$V_1 + V_1' = 2V_2.$$

Die Summe zweier beliebiger zusammengehöriger Potentiale mit demselben Ausschlag ist gleich der doppelten Hilfsladung.

Noch einfacher wird die Sache, wenn es sich nicht um den absoluten Wert des Fadenpotentials, sondern nur um die Differenz zweier Potentialwerte handelt, wie es ja bei Messungen der Radioaktivität, der Leitfähigkeit der Luft und dergl. immer der Fall ist. Dann hat man sich um das Hilfspotential überhaupt nicht zu kümmern, weil es beim Bilden der Differenz herausfällt. Die beiden abgelesenen Werte ergeben subtrahiert (bezw. wenn die Fäden durch Null hindurchgegangen sind, addiert) die Differenz der Fadenpotentiale.

Die eigentliche Aufgabe der Hilfsladung besteht also darin, daß die Fäden, wenn sie das Potential Null haben, schon mehr oder weniger gespreizt sind. Daraus ergibt sich eine weitere Folgerung.

Ist $\pm V_0$ das äußerste Potential, das ein Apparat ohne Hilfsladung noch messen kann, so ist die obere Grenze bei Anwendung der Hilfsladung $+V_2$ verschoben nach $V_0 + V_2$. Man kann daher mit einem solchen Apparat und immer an derselben Eichkurve ganz beliebig hohe Potentiale messen, wenn man nur eine entsprechende Hilfsladung zur Verfügung hat. Und das ist ein zweiter Vorzug der Apparate mit Hilfsladung.

Ein dritter Vorzug liegt darin, daß der Nullpunkt des Fadenpotentials durch die Hilfsladung verschoben wird an die Stellen höherer Empfindlichkeit. Dadurch wird erreicht, daß man vollständig bis Null herab die normale Empfindlichkeit hat.[1]) Während man ohne Hilfsladung zum Beispiel für 1 Strich in der Mitte der Kurve 1 Volt Potentialdifferenz hat, wird man am Anfang für 1 Strich vielleicht 5 Volt brauchen, so daß bei 10 Volt etwa die Messung schon sehr unsicher würde. Mit Hilfsladung erhält man für 1 Volt 1 Strich Ausschlag. Man kann also Bruchteile eines Volts noch messen. Wie wichtig das für manche Arbeiten ist und wie sehr dadurch das Instrument dem Blättchenelektroskop, das nur bis gegen 70 Volt brauchbare Werte gibt, überlegen ist, liegt auf der Hand.

Diese Empfindlichkeit kann noch verdoppelt werden in allen Fällen, wo man die zu messende Spannung kommutieren kann, also fast stets, wo man mit Potentialdifferenzen bei elektrischen Strömen zu tun hat.

Kann man die zu messende Spannung nicht kommutieren, so erreicht man doch denselben Zweck, wenn man das Vorzeichen der Hilfsladung kommutieren kann und das dürfte in sehr vielen Fällen möglich sein. Natürlich ist dieses Verfahren nur anzuwenden bei Potentialmessungen, wenn die Fäden mit einer konstanten Elektrizitätsquelle dauernd verbunden sind.

Valkenburg, Phys. Inst. des Ignatius-Kollegs, den 1. Juli 1907.

(Eingegangen 5. Juli 1907.)

1) Im Prinzip denselben Kunstgriff hat schon Hallwachs verwendet, um ein Blättchenelektroskop für schwache Potentiale empfindlich zu machen. Hallwachs, Über die lichtelektrische Ermüdung, Ber. d. kgl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, Leipzig, Bd. 58, S. 354, 1906.

Mitteilungen aus dem physikalischen Institut der Universität Pisa. (Direktor: A. Battelli.)

Nr. 34[1]): A. Battelli, Theoretische und experimentelle Untersuchungen über den elektrischen Leitungswiderstand der Solenoide für Ströme hoher Frequenz. (II. Teil.)[2])

Bei der Behandlung des elektrischen Leitungswiderstandes der Solenoide für Wechselströme habe ich nachgewiesen[2]), daß die theoretischen Ergebnisse, welche Wien für diesen Punkt gefunden hat, praktisch nur für Ströme von niedriger Wechselzahl gelten, bei denen übrigens der Wert des Widerstandes sich nur sehr wenig von dem für Gleichstrom geltenden unterscheidet. Ich habe bei der Gelegenheit auch die theoretischen Ergebnisse behandelt, zu denen später Sommerfeld bei der Bearbeitung derselben Frage gelangt war. Diese Ergebnisse beziehen sich auf ideale Solenoide, wie man sie etwa dadurch herstellen könnte, daß man ein Metallblech schraubenförmig auf einen Zylinder so aufwickelte, daß der zwischen zwei aufeinander folgenden Windungen belegene isolierende Zwischenraum auf Null reduziert würde. In Wirklichkeit sind aber die Solenoide immer aus Drähten von kreisförmigem Querschnitt hergestellt, und nicht aus Blechen von rechtwinkligem Querschnitt. Infolgedessen lassen sich die theoretischen Er-

1) Nr. 33: Diese Zeitschr. **8**, 298, 1907.
2) I. Teil: Diese Zeitschr. **8**, 296, 1907.

gebnisse Sommerfelds weder für niedrige noch für hohe Wechselzahlen auf wirkliche Solenoide anwenden.

Sommerfeld vergleicht nun den Widerstand R seiner idealen Solenoide mit dem entsprechenden Widerstand R', den man durch Versuch für diese Solenoide findet, wenn man ihren Querschnitt bei gleichem Flächeninhalt in einen Kreis verwandelt. Dabei gelangt er denn zu der Schlußfolgerung, daß zwischen R und R' allerdings eine merkliche Verschiedenheit besteht, die sich auf etwa 50 v. H. von R' beläuft, daß indessen das Verhältnis $\frac{R}{R'}$ eine Konstante γ ist, welche sowohl für hohe als auch für niedrige Wechselzahlen denselben Wert ($\gamma = 0{,}6$) besitzt.

Ich habe versucht, diese wichtige Frage auf einem anderen Wege theoretisch zu lösen. Für Ströme von niedriger Wechselzahl leisten nun die Ergebnisse Wiens recht gute Dienste. Ich habe mich deshalb einzig und allein mit dem Fall hoher Wechselzahlen beschäftigt. Ich habe dabei meine Behandlungsweise der Frage auf eine Beobachtung ganz allgemeiner Art gestützt. Dadurch wird die theoretische Tragweite der Gesetze, welche die Lokalisierung der Wechselströme hoher Frequenz auf der Oberfläche geradliniger Leiter ausdrücken, beträchtlich vergrößert.

In einem Leiter von beliebiger Gestalt genügen bekanntlich die drei Komponenten u, v, w der Stromdichte, wenn diese mit der Zeit t veränderlich ist, den Gleichungen:

$$\Delta_2 u = \frac{4\pi\mu}{\sigma}\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad \Delta_2 v = \frac{4\pi\mu}{\sigma}\frac{\partial v}{\partial t}, \qquad \Delta_2 w = \frac{4\pi\mu}{\sigma}\frac{\partial w}{\partial t}, \tag{1}$$

wo

$$\Delta_2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$$

bedeutet, und wo die Konstanten μ und σ die magnetische Permeabilität bzw. den spezifischen Leitungswiderstand des Leiters darstellen.

Diese Gleichungen sind für zwei Spezialfälle integriert worden, und zwar einmal für den Fall, daß der Leiter aus einer metallischen Platte besteht, und zweitens für den Fall, daß der Leiter aus einem Vollzylinder oder einem Hohlzylinder besteht. In beiden Fällen findet man bei hinreichend hoher Frequenz des Wechselstroms, wenn man [1]) mit

$$w_0 = A\cos\omega t$$

die Stromdichte an der Oberfläche des Leiters und demgemäß mit ω die Zahl der Stromwechsel in 2π Sekunden bezeichnet, man findet, sage ich, daß die Stromdichte in einem Punkte M im Innern des Leiters und in der Entfernung

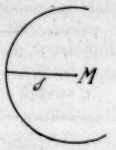

Fig. 1.

s von der Oberfläche (siehe Fig. 1), daß die Stromdichte in einem solchen Punkte

$$w = Ae^{-\alpha s}\cos(\omega t - \alpha s) \tag{2}$$

ist. In dieser Gleichung ist α eine Konstante, und zwar:

$$\alpha = \sqrt{\frac{2\pi\mu\omega}{\sigma}}. \tag{3}$$

Wie man sieht, nimmt die Amplitude der Stromdichte

$$Ae^{-\alpha s}$$

mit wachsendem s nach einem Exponentialgesetz ab. Infolgedessen kann man bei sehr hohen Wechselzahlen, wo α einen viel höheren Wert hat, den Strom fast vollkommen als in einer äußerst dünnen Oberflächenschicht des Leiters angeordnet betrachten. Ferner nimmt die Stromphase mit zunehmendem s in demselben Maße ab, in dem der in dem vorstehenden Ausdruck für die Amplitude auftretende Exponent seinem absoluten Werte nach wächst.

Es ist zu beachten, daß für zylindrische Leiter mit kreisförmigem Querschnitt bekanntlich die Beziehung

$$\Delta_2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial s}$$

gilt. Durch Einsetzen in die vorstehende Gleichung erhält man:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{4\pi\mu}{\sigma}\frac{\partial w}{\partial t}. \tag{4}$$

Andererseits läßt sich leicht nachweisen, daß der Ausdruck (2) der Gleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = \frac{4\pi\mu}{\sigma}\frac{\partial w}{\partial t} \tag{5}$$

genügt.

Wir werden daher zu der Annahme geführt, daß in der Gleichung (4) das Glied

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial s}$$

1) J. J. Thomson, Recent researches in Electricity and Magnetism, §§ 257 ff. (Bei der Verwendung der Thomsonschen Formeln nehme ich an, daß $m = 0$ ist, daß also die Abmessungen des Leiters gegenüber der Wellenlänge der Ströme zu vernachlässigen sind.)

gegenüber den anderen Gliedern zu vernachlässigen ist, oder daß der Leiter sich so verhält, als ob der Krümmungsradius ϱ des Drahtquerschnittes unendlich groß wäre.

Ich betrachte nunmehr den allgemeinen Fall eines beliebig gestalteten Leiters. Ich nehme an, daß die Richtungscosinus α, β, γ des Stromes bekannt seien. Ist φ die Größe der Stromdichte im Punkte x, y, z, so ist

$$u = \varphi\alpha,$$
$$v = \varphi\beta,$$
$$w = \varphi\gamma,$$

und jede einzelne Gleichung des Systems (1) kann zur tatsächlichen Bestimmung von φ dienen. Um die Symmetrie in der Behandlungsweise strenger durchzuführen, ist es vorteilhafter, eine spezielle lineare Verbindung dieser Gleichungen zu benutzen, und zwar die, welche man erhält, wenn man die einzelnen Gleichungen des Systems (1) beziehungsweise mit α, β, γ multipliziert und die Produkte addiert. Man erhält dann die Gleichung:

$$\Delta_2\varphi = \frac{4\pi\mu}{\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + D\varphi, \qquad (6)$$

in welcher der Faktor D die Bedeutung

$$D = \Delta_1\alpha + \Delta_1\beta + \Delta_1\gamma \qquad (7)$$

hat. Δ_1 ist hier das bekannte Symbol für den ersten Differentialparameter:

$$\Delta_1 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2.$$

In dem Falle, daß der Strom eine konstante Richtung hat, sind α, β, γ konstant und demzufolge wird $D = 0$. Dann genügt φ denselben Gleichungen wie jede einzelne seiner Komponenten.

Ist hingegen die Richtung des Stromes nicht konstant, so wird im allgemeinen D von Null verschieden und die Gleichung (6), welcher die Größe φ der Stromdichte genügt, wird im allgemeinen verschieden von den Gleichungen, welchen die Komponenten u, v, w eben dieser Stromdichte genügen.

Die größere oder geringere Bedeutung, welche in den gewöhnlicheren Fällen das Glied $D\varphi$ gegenüber den sonstigen in die Gleichung (6) eingehenden Gliedern gewinnen kann, hängt ab von der Natur der tatsächlichen Ausdrücke für α, β, γ als Funktionen von x, y, z.

Ich will meine Betrachtungen auf den Fall beschränken, der für das Problem, dessen Lösung ich mir vorgesetzt habe, am interessantesten ist, und will daher annehmen, daß wenigstens innerhalb eines genügend eng begrenzten Feldes um irgendeinen Ursprungspunkt des Leiters die Stromlinien annäherungsweise als Kreisbogen mit einer allen gemeinsamen Achse angesehen werden können. Nimmt man diese Achse zur z-Achse und ordnet die beiden anderen Achsen in geeigneter Weise an, so erhält man:

$$\alpha = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$\beta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$\gamma = 0.$$

Daraus ergibt sich:

$$D = \Delta_1\alpha + \Delta_1\beta + \Delta_1\gamma = \frac{1}{r^2}.$$

Die Gleichung (6) geht demnach über in:

$$\Delta_2\varphi = \frac{4\pi\mu}{\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\varphi.$$

Im allgemeinen Falle haben die Stromlinien eine Krümmung, die vernachlässigt werden kann, und demzufolge erhält man, unter Vernachlässigung des letzten Gliedes dieser Gleichung:

$$\Delta_2\varphi = \frac{4\pi\mu}{\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \qquad (8)$$

Um nun zu der oben angedeuteten Verallgemeinerung zu gelangen, betrachten wir jetzt die Gesamtheit der Flächen, auf deren jeder die Stromdichte einen konstanten Wert φ hat.

Es sei

$$z = z(x, y)$$

eine dieser Flächen.

Nehmen wir einen Erzeugungspunkt (x, y, z) dieser Fläche, und richten wir die x- und die y-Achse nach den Tangenten zu den Hauptkrümmungslinien in dem gewählten Punkte, so nimmt der tatsächliche Ausdruck für den Parameter $\Delta_2\varphi$ die Form

$$\Delta_2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - (r+t)\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

an, wo nach der Bezeichnungsweise von Monge

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$
$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

ist. Bezeichnet man also mit s den senkrechten Abstand irgendeines Punktes des Leiters von der Fläche $z = z(x, y)$, und hält man sich dabei gegenwärtig, daß

$$r + t = \frac{1}{\varrho}$$

ist, wo $\frac{1}{\varrho}$ die mittlere Krümmung eben dieser Fläche bedeutet, so erhält man:

$$\Delta_2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial s}.$$

Setzt man dies nun in (8) ein, so erhält man schließlich:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{4\pi\mu}{\sigma}\frac{\partial \varphi}{\partial t}. \qquad (9)$$

Wie man sieht, stimmt diese Formel mit der Formel (4) überein, die für zylindrische Leiter mit kreisförmigem Querschnitt gilt. Sie kann daher als eine Verallgemeinerung dieser letzteren gelten, welche man erhält, wenn man der Größe $\frac{1}{\varrho}$ die Bedeutung der mittleren Krümmung der Fläche beilegt, auf welcher die Größe φ der Stromdichte konstant ist.

Gerade wie in Gleichung (4) das Glied $\frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial s}$ für Ströme von hoher Wechselzahl gegenüber den beiden anderen Gliedern vernachlässigt werden kann, so werden wir hier zu der Annahme geführt, daß auch in Gleichung (9) das Glied $\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ im Vergleich zu den übrigen Gliedern vernachlässigt werden kann, und daß wir mit großer Annäherung Gleichung (9) durch die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = \frac{4\pi\mu}{\sigma}\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

ersetzen können.

Bezeichnen wir also mit φ_0 den Wert für die Größe der Stromdichte auf einer der Flächen, auf denen $\varphi = \text{const}$ ist, und betrachten wir einen Bogen $MN = s$ (siehe Fig. 2) einer auf der Schar dieser Flächen senkrechten Bahn, von der festen Fläche S, für die $\varphi = \varphi_0$ gilt, ab gerechnet, so erhalten wir:

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\alpha s} \cos(\omega t - \alpha s), \qquad (10)$$

wo, wie gewöhnlich,

$$\alpha = \sqrt{\frac{2\pi\omega\mu}{\sigma}}$$

ist.

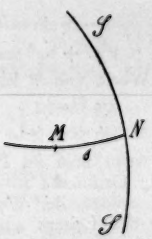

Fig. 2.

Es ändert sich also für Ströme hoher Wechselzahl die Stromdichte beim Übergang von einer Fläche zur anderen aus der Schar der Flächen, auf denen $R = \text{const}$ ist, nach denselben Gesetzen, welche für zylindrische Leiter und für ebene Platten gelten. Hier haben wir also die Verallgemeinerung, auf welche ich eingangs hingewiesen habe.

Sie läßt sich in allen Fällen anwenden, wo die Stromlinien Bögen von sehr großem Durchmesser mit einer gemeinsamen Achse sind, mögen sie nun gebildet sein aus Windungen von gleichem Durchmesser, von konstanter Ganghöhe oder von veränderlicher Ganghöhe, aus Drähten mit kreisförmigem oder mit anderem Querschnitt usw.

Im dritten Teil werde ich zeigen, welche Folgerungen sich hieraus für den Widerstand der gewöhnlichen Solenoide ziehen lassen.

(Aus dem Italienischen übersetzt von Max Iklé.)

(Eingegangen 24. Juni 1907.)

Mitteilungen aus dem physikalischen Institut der Universität Pisa. (Direktor: A. Battelli.)

No. 35[1]: A. Battelli, Theoretische und experimentelle Untersuchungen über den elektrischen Leitungswiderstand der Solenoide für Ströme hoher Frequenz. (III. Teil).[2]

In Wirklichkeit werden die Solenoide in der Weise hergestellt, daß ein Metalldraht von kreisförmigem Querschnitt auf einen Zylinder aufgewickelt wird, auf welchem dann die Achse des Drahtes eine Schraubenlinie von konstanter Ganghöhe p bildet.

Der Einfachheit halber kann man sich indessen vorstellen, daß die einzelnen Windungen kreisförmig seien. Ich nehme nun, von einer beliebigen Windung ausgehend, als x-Achse die Tangente an den Draht im Mittelpunkt O (siehe Fig. 1) eines Meridianschnittes durch die Windung an. Dann wird:

$$\left.\begin{aligned} u = v &= 0, \\ \varphi &= w \end{aligned}\right\},$$

und das Problem wird auf die Bestimmung von w als Funktion von x und y zurückgeführt.

1) No. 34: Diese Zeitschr. **8**, 530, 1907.
2) I. Teil: Diese Zeitschr. **8**, 296, 1907; II. Teil: Diese Zeitschr. **8**, 530, 1907.

Fig. 1.

In der x-y-Ebene nehme ich zur x-Achse die Senkrechte auf der Solenoidachse PQ und zur y-Achse die Parallele zu PQ. Ich bezeichne mit

$$f(x, y) = 0$$

eine der Linien, auf denen $w = \text{const.}$ ist. Es handelt sich nunmehr darum, die Gestalt solcher Linien in großen Zügen darzustellen. Sie fallen mit den Linien zusammen, auf welchen die elektrische Kraft einen konstanten Wert hat. Letztere setzt sich nun aus zwei Gliedern zusammen. Das eine dieser Glieder ist für alle Punkte des Leiters konstant und rührt von der äußeren elektromotorischen Kraft her, welche an den beiden Enden des Solenoids wirksam ist. Das andere Glied ist mit x und y veränderlich und verkörpert die elektromotorische Kraft, die in jedem Punkte des Solenoids seitens des in den übrigen Punkten derselben Windung und der benachbarten Windungen fließenden veränderlichen Stromes induziert wird. Diese induzierte elektromotorische Kraft M setzt sich nun ihrerseits wieder aus zwei Gliedern zusammen: das eine Glied, F_1, hängt einzig und allein von dem Strome ab, der in der Windung fließt, welcher der betrachtete Punkt angehört; das andere Glied, F_2, hängt von dem Strome ab, der in den übrigen Windungen fließt. Bezeichnen wir mit ϱ die Entfernung eines erzeugenden Punktes des Leiters von der Drahtachse, so können wir einen angenäherten Ausdruck für F_1 erhalten, wenn wir für einen Augenblick annehmen, daß der Strom rings um eben diese Achse gleichförmig verteilt sei. In diesem Falle ist F_1 nur von ϱ abhängig. Denken wir uns andererseits F_2 in eine Taylorsche Reihe nach steigenden Potenzen von x und y entwickelt, und vernachlässigen wir in dieser Reihe die Glieder von höherem Grade als dem ersten, so können wir setzen:

$$F_2 = a + bx + cy.$$

Nun muß aber aus Symmetriegründen der Wert von M und ebenso auch der Wert von F_2 unverändert bleiben, wenn wir y mit $-y$ vertauschen. Demnach ist:

$$c = 0$$

und

$$M = F_1(\varrho) + a + bx. \qquad (1)$$

Ich nehme an, daß die Gleichung für die Linien, auf denen die Stromdichte w konstant ist, wirklich durch eine Gleichung von der Form der Gleichung (1) dargestellt werde, in welcher sämtliche Koeffizienten einen konstanten Wert haben, mit Ausnahme von M, welches von Linie zu Linie veränderlich sei.

Es sei nun s ein Bogen, der in jedem Punkte auf der Schar der Flächen $M = \text{const.}$ senkrecht steht. Dann gilt:

$$\frac{dM}{ds} = \sqrt{\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)^2}. \qquad (2)$$

Nun ist nach (1):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial x} &= F_1'(\varrho)\frac{y}{\varrho} \\ \frac{\partial M}{\partial y} &= F_1'(\varrho)\frac{y}{\varrho} \end{aligned}\right\}.$$

Setzt man dies in (2) ein, so erhält man:

$$\frac{\partial M}{\partial s} = \sqrt{[F_1'(\varrho)]^2 + b^2 + 2F_1'(\varrho)b\frac{x}{\varrho}}.$$

Bei Verwendung von Polarkoordinaten, also wenn man

$$\left.\begin{aligned} x &= \varrho\cos\Theta \\ y &= \varrho\sin\Theta \end{aligned}\right\}$$

setzt, geht vorstehende Gleichung in die Form

$$\frac{dM}{ds} = \sqrt{p^2 + 2q^2\cos\Theta}$$

über, wo p und q nur Funktionen von ϱ sind. Hieraus erhält man:

$$ds = \frac{dM}{\sqrt{p^2 + 2q\cos\Theta}} \qquad (3)$$

Nun ist in Polarkoordinaten ausgedrückt:

$$M = F_1(\varrho) + a + b\varrho\cos\Theta; \qquad (4)$$

ferner ist:

$$dM = \frac{\partial M}{\partial\varrho}d\varrho + \frac{\partial M}{\partial\Theta}d\Theta.$$

Ich betrachte zunächst ausschließlich die auf der Oberfläche des Leiters gelegenen Punkte. Für diese ist $\varrho = \text{const.}$, und es ist daher beim Übergang von einem Punkte des Umfanges zu einem anderen:

$$dM = \frac{\partial M}{\partial\Theta}d\Theta = -b\varrho\sin\Theta d\Theta,$$

folglich:

$$ds = \frac{-b\varrho\sin\Theta d\Theta}{\sqrt{p^2 + 2q^2\cos\Theta}}.$$

Für kleine Werte von Θ ist:

$$\left.\begin{aligned} \cos\Theta &= 1 \\ \sin\Theta &= \Theta \end{aligned}\right\},$$

folglich wird, wenn man im Punkte A (siehe Fig. 2) mit den Ordinaten $\varrho = 0$ und $\Theta = 0$ den Wert null beilegt, der Wert s_0 von s auf dem Umkreise des Leiters und in der Nachbarschaft von A:

$$s_0 = \beta^2\Theta^2, \qquad (5)$$

wo

$$\beta^2 = \frac{-b\varrho}{2\sqrt{p^2 + 2q^2}} \qquad (6)$$

gesetzt ist.

Was nun den Wert von s, immer in der Nähe von A, aber im Innern des Leiters, an-

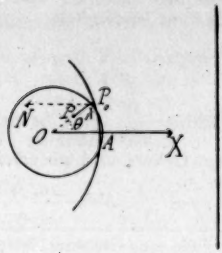

Fig. 2.

geht, so falle ich vom Ursprungspunkte P die Senkrechte PP_0 auf den Umfang und bezeichne mit λ die Strecke PP_0. Entwickelt man s nach Taylor, so erhält man für hinreichend kleine Werte von λ:

$$s = s_0 + \frac{ds}{d\lambda}\lambda.$$

Für die Berechnung von $\frac{ds}{d\lambda}$ betrachte man die durch P_0 verlaufende Fläche gleichförmiger Stromdichte; P_0N sei deren Normale im Punkte P_0. Es ist klar, daß dann

$$\frac{ds}{d\lambda} = \cos(NP_0P)$$

ist. Andererseits kann man annehmen, daß in der Umgebung des Punktes A die Flächen gleicher Stromdichte der Solenoidachse parallel sind. Daraus ergibt sich, daß in der Nachbarschaft von A

$$\sphericalangle\, NP_0P = 0$$

und demnach

$$s = s_0 + \lambda = \beta^2\Theta^2 + \lambda$$

ist.

Wenden wir jetzt das allgemeine Ergebnis an, das durch die Formel (10) des zweiten Teiles ausgedrückt ist, und beachten wir, daß in diesem Falle

$$\varphi = w$$

ist, so erhalten wir, wenn wir die Stromdichte im Punkte A mit $w_0 \cos \omega t$ bezeichnen, in den benachbarten Punkten:

$$w = w_0 e^{-\alpha(\lambda+\beta^2\Theta^2)} \cos(\omega t - \alpha[\lambda + \beta^2\Theta^2]). \quad (7)$$

Diese Formel gibt eine ziemlich klare Vorstellung von der Gesetzmäßigkeit, nach welcher der Strom in dem Drahtquerschnitt verteilt ist: die Amplitude der Stromdichte ist

$$w_0 e^{-\alpha(\lambda+\beta^2\Theta^2)},$$

und diese Amplitude nimmt augenscheinlich nach einem Exponentialgesetz ab, sei es nun mit wachsender Entfernung λ des Ursprungspunktes vom Leiterumfang, sei es mit wachsendem Azimut Θ. Diese Änderungen der Dichte sind um so beträchtlicher, je größer der Wert von α und je höher demgemäß die Wechselzahl des Stromes ist.

Was nun die nicht in der Nachbarschaft von A gelegenen Punkte angeht, so kann man nicht sagen, ob Gleichung (7) streng gültig bleibt. Es ist indessen zu beachten, daß man nach dem, was Wien und Sommerfeld gezeigt haben, schon a priori weiß, daß die Behandlung solcher Punkte überflüssig ist, weil in ihnen die Stromdichte praktisch zu vernachlässigen ist. Da auch in Formel (7) dieser Umstand berücksichtigt wird, so will ich im folgenden annehmen, daß sie auch für große Werte von λ und von Θ gelte. Auf Grund von (7) kann man also sagen, daß man für sehr hohe Wechselzahlen annehmen kann, daß der Strom auf eine enge Umgebung der der Solenoidachse nächstgelegenen Punkte A beschränkt bleibt. In Fig. 3 ist der Teil des Drahtquerschnittes, der praktisch für den Stromdurchgang nutzbar gemacht wird, durch Punktierung gekennzeichnet.

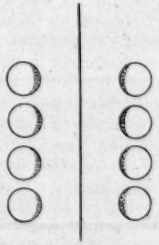

Fig. 3.

Ich gehe nunmehr zur Berechnung des Widerstandes R des Solenoids über. Zu diesem Zwecke bezeichne ich mit W die durch den Strom in einer Sekunde im Stromkreise entwickelte Wärme und erhalte:

$$W = \sigma \int w^2{}_m dv,$$

wo dv das Volumelement und $w^2{}_m$ das Mittel aus den Werten ist, welche das Quadrat von w im Verlaufe einer Periode annimmt, und wo die Integration über das ganze von dem Leiter eingenommene Volumen zu erstrecken ist. Bezeichnet l die Länge des Leiters und a den Halbmesser seines Querschnittes, so ist:

$$dv = l(a - \lambda)\, d\lambda\, d\Theta,$$

somit

$$W = \sigma l a \int\int w^2{}_m d\lambda\, d\Theta - \sigma l \int\int w^2{}_m \lambda\, d\lambda\, d\Theta.$$

Hier ist offenbar die Integration nach λ von

null bis a zu erstrecken und die Integration über Θ von $-\pi$ bis $+\pi$.

Es ist überflüssig, auch das zweite Glied, nämlich

$$\sigma l \int\int w^2{}_m \lambda d\lambda d\Theta,$$

zu behandeln. Dieses Glied ist nämlich gegenüber dem ersten zu vernachlässigen für Punkte in der engeren Umgebung von A; außerhalb dieses Umkreises wird $w^2{}_m$ zu vernachlässigen sein, so daß man ohne merkliche Beeinflussung des Ergebnisses

$$W = \sigma l a \int d\lambda \int w^2{}_m d\Theta$$

setzen kann, wo nach (7)

$$w^2{}_m = \frac{w_0{}^2}{2} e^{-2\alpha(\lambda + \beta^2\Theta^2)}$$

ist.

Durch Einsetzen erhält man:

$$W = \frac{\sigma l a w_0{}^2}{2} \int e^{-2\alpha\lambda} d\lambda \int e^{-2\alpha\beta^2\Theta^2} d\Theta.$$

Was die Grenzen der Integration angeht, so sind diese, wie bereits gesagt, für das erste Integral o und a und für das zweite $-\pi$ und $+\pi$. Es ist indessen zu beachten, daß die zu integrierenden Funktionen $e^{-2\alpha\beta^2\Theta^2}$ und $e^{-2\alpha\lambda}$ sich mit wachsendem λ und wachsendem $+\Theta$ asymptotisch der Null nähern, und daß für hohe Wechselzahlen, also für große Werte von α, die Werte eben dieser Funktionen nur für solche Werte der Veränderlichen λ und Θ von null merklich verschieden sind, welche sehr nahe an null liegen. Daraus folgt, daß der Wert der beregten Integrale merklich unverändert bleibt, selbst wenn man als Integrationsgrenzen für das erste Integral o und ∞ und für das zweite $-\infty$ und $+\infty$ nimmt.

Demnach ist

$$W = \frac{\sigma l a w_0{}^2}{2} \int_0^{\infty} e^{-2\alpha\lambda} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\alpha\beta^2\Theta^2} d\Theta,$$

und mithin:

$$W = \frac{\sigma l a w_0{}^2 \sqrt{\pi}}{4\beta\sqrt{2}} \alpha^{-3/2}.$$

Bezeichnet man andererseits mit $\mathfrak{J}$ die Gesamtintensität des Stromes, so erhält man:

$$\mathfrak{J} = \int w dS,$$

wo dS das Flächenelement des Drahtquerschnittes ist, also

$$dS = (a - \lambda) d\lambda d\Theta.$$

Auf Grund analoger Betrachtungen erhält man

$$\mathfrak{J} = 2^{3/4} \frac{a w_0 \sqrt{\pi}}{\beta} \alpha^{-3/2} \cos\left(\omega t - \frac{3\pi}{8}\right).$$

Der Mittelwert des Quadrats von $\mathfrak{J}$ im Verlaufe einer Periode ist folglich

$$\mathfrak{J}^2{}_m = \frac{a^2 w_0{}^2 \pi}{4\beta^2\sqrt{2}} \alpha^{-3}.$$

Das Verhältnis $\frac{W}{\mathfrak{J}^2{}_m}$ gibt bekanntlich den Widerstand des Leiters, und wir erhalten daher:

$$R = \frac{W}{\mathfrak{J}^2{}_m} = \sigma l \frac{\beta}{a\sqrt{\pi}} \alpha^{3/2} = \frac{2\sigma l \beta \sqrt{2}}{a} \left(\frac{\mu}{\sigma T}\right)^{3/2},$$

wo T die Periode des Stromes bezeichnet.

Wenn derselbe Draht geradlinig ausgespannt wäre, so würde man nach der bekannten Formel von Rayleigh erhalten:

$$R' = \frac{\sigma l}{a} \left(\frac{\mu}{\sigma T}\right)^{1/2} \tag{8}$$

und somit:

$$\frac{R}{R'} = 2\pi\beta\sqrt{2} \sqrt[4]{\frac{\mu}{\sigma T}}. \tag{9}$$

Das durch Gleichung (9) ausgedrückte Ergebnis weicht wesentlich von dem ab, welches Sommerfeld gefunden hat, und gibt einen sehr wichtigen Umstand zu erkennen, der in der Praxis tatsächlich verwirklicht wird, nämlich die Abhängigkeit des Verhältnisses $\frac{R}{R'}$ von der Wechselzahl des Stromes. Wie aus Gleichung (9) hervorgeht, wächst der Wert für dieses Verhältnis proportional mit der vierten Wurzel der Wechselzahl.

Um diesen Fall experimentell zu entscheiden, braucht man nur einen Blick auf die nachstehende Tabelle zu werfen; in welcher die Ergebnisse der wenigen bisher bekannten Versuche über diesen Gegenstand zusammengestellt sind. Es sind dies die Versuche, welche ich in meiner Arbeit über die oszillatorischen Entladungen ausgeführt habe.[1])

Periode	$\frac{R}{R'} = \frac{\text{Widerstand des Solenoids}}{\text{Widerstand des geradlinigen Drahtes}}$
$4{,}3 \cdot 10^{-6}$ Sek.	1,96
$3{,}0 \cdot 10^{-6}$ „	2,15
$2{,}2 \cdot 10^{-6}$ „	2,17

Man sieht ohne weiteres, daß in Übereinstimmung mit meiner Schlußfolgerung mit wachsender Wechselzahl der Wert des Verhältnisses $\frac{R}{R'}$ beständig zunimmt. Man sieht aber noch mehr: Auch das in Gleichung (22) ausgedrückte quantitative Gesetz kann mit enger Annäherung durch eben diese Versuche als bestätigt gelten. Nach meiner Formel

1) Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino 51, 374.

müßte nämlich der Ausdruck $\frac{R}{R'}\sqrt[4]{T}$ für hohe Wechselzahlen einen konstanten Wert behalten.

Berechnet man nun aus den vorstehend mitgeteilten Zahlen den Wert für die Konstante $K=\frac{R}{R'}\sqrt[4]{T}$, so erhält man:

T	$K=\frac{R}{R'}\sqrt[4]{T}$
$4{,}3\cdot 10^{-6}$	$2{,}82\cdot 10^{-3/2}$
$3{,}0\cdot 10^{-6}$	$2{,}83\cdot 10^{-3/2}$
$2{,}2\cdot 10^{-6}$	$2{,}64\cdot 10^{-3/2}$

Wie man sieht, ist besonders bei den beiden ersten Wechselzahlen die Übereinstimmung zwischen meiner Formel und den Versuchsergebnissen, sofern sie keine zufällige ist, eine geradezu vollkommene.

(Aus dem Italienischen übersetzt von Max Iklé.)

(Eingegangen 24. Juni 1907.)

Über die Elastizität von Gelatinelösungen und eine Methode zur Bestimmung der Koagulationsgeschwindigkeit.

Von R. Reiger.

In dieser Zeitschrift **8**, 442, 1907 erschien eine Arbeit von C. Rohloff und Shinjo: „Über die Grenze zwischen dem festen und flüssigen Zustand bei Gelatinelösungen". Die Arbeit berührt sich mehrfach mit Versuchen, die ich angestellt habe und über die ich eine vorläufige Mitteilung in den Sitzungsber. d. physik.-med. Sozietät in Erlangen veröffentlicht habe.[1]) Ich möchte daher auch an dieser Stelle auf die dort mitgeteilten Versuche hinweisen.

Die Versuche wurden teils mit der (statischen) Methode von Schwedoff[2]), teils mit einer dynamischen Methode durchgeführt.

1. Die statische Methode von Schwedoff. — Der Raum zwischen den beiden konzentrischen Gefäßen A und B (Fig. 1) ist mit der Substanz[3]) gefüllt, deren Modul bestimmt werden soll. Haftet die Substanz an den Wänden, so kann man dieselbe tordieren, indem man das obere Ende des Drahtes tordiert

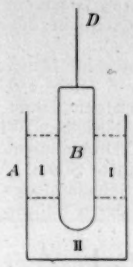

Fig. 1.

und das Gefäß A festhält, oder indem man das obere Ende des Drahtes festhält und dem Gefäß A eine Drehung erteilt.

Ist für den letzteren Fall φ die Drehung des Gefäßes und δ der Torsionswinkel des Drahtes, so ist $\omega=\varphi-\delta$ die Torsion der Substanz. Zur Bestimmung der Winkel φ und δ dienen zwei Spiegel. Der eine ist durch einen Stab mit dem Gefäß A so verbunden, daß seine Drehungsachse mit der Drehungsachse des äußeren Gefäßes zusammenfällt, der andere ist mit dem unteren Ende des Torsionsdrahtes D verbunden.

Ist k die Direktionskraft der Substanz und f die des Drahtes, so ist:

$$k\omega=f\delta. \qquad (1)$$

Die Größe f wird nach bekannten Methoden bestimmt. Für die Direktionskraft der Substanz ergibt sich:

$$k=\frac{4\pi n(h+x)}{\frac{1}{r_0^2}-\frac{1}{r_1^2}}, \qquad (2)$$

wenn r_0 und r_1 die Radien des inneren und äußeren Gefäßes und n der Modul der Substanz ist. h ist die Höhe desjenigen Hohlzylinders, der in Fig. 1 mit I bezeichnet ist, während x der Höhe des Hohlzylinders entspricht, der dieselbe Wirkung hervorbringen würde wie der in Fig. 1 mit II bezeichnete Teil der Substanz.

Die Größe x läßt sich nach Schwedoff experimentell mit Hilfe einer Flüssigkeit von bekanntem Reibungskoeffizienten aus der Torsion des Drahtes D bestimmen, wenn man das Gefäß A in Rotation versetzt.[1]) Da im folgenden mehrfach Gelatinelösungen von größerer Konzentration verwandt wurden, so konnte in diesen Fällen im Raum II an Stelle der Substanz Quecksilber treten und $x=0$ gesetzt werden. Dies ist jedoch nur erlaubt, wenn die Direktionskraft des Drahtes hinreichend groß ist.

1) Bd. 38, S. 252, 1906. (Eingegangen am 30. Januar 1907.) Literaturangaben über Elastizität von Gelatinelösungen a. a. O. sowie in der oben erwähnten Arbeit von C. Rohloff und Shinjo.

2) Th. Schwedoff, Journ. d. Phys. **8**, 341, 1889 und **9**, 34, 1890.

3) Schwedoff beschreibt diese Methode zur Untersuchung der Elastizität von „Flüssigkeiten". Es soll jedoch der Ausdruck Flüssigkeit aus den im 6. Abschnitt gegebenen Gründen vermieden werden und im folgenden stets der Ausdruck Substanz gebraucht werden, wobei über den Aggregatzustand zunächst gar keine Annahme gemacht wird.

1) a. a. O. **9**, 38.

Zur Verhinderung der Verdunstung von Wasser in den oberen Teilen der Gelatinelösung dient eine dünne Ölschicht, die auf die Gelatine gegossen wird.

2. Die dynamische Methode. — Erteilt man dem Gefäß B eine Drehung um den Winkel ψ, so erfahren Draht und Substanz eine Torsion um denselben Winkel. Die dadurch bedingten Drehmomente $k\psi$ und $f\psi$ wirken in demselben Sinne. Wird B freigelassen, so führt es Schwingungen um die Gleichgewichtslage aus, deren Schwingungsdauer gegeben ist durch:

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{K}{f+k}},$$

wenn K das Trägheitsmoment des schwingenden Systems ist. Ist T die Schwingungsdauer, wenn der Raum zwischen A und B nicht von Substanz erfüllt ist, so ist

$$\frac{T^2}{\tau^2} = \frac{f+k}{f}. \qquad (3)$$

Praktisch wird man so verfahren, daß man die Direktionskräfte f und $f+k$ bestimmt, indem man das Trägheitsmoment des schwingenden Systems in beiden Fällen um denselben Betrag K' vermehrt. Sind T_1 und τ_1 die Schwingungsdauern ohne K' und T_2 und τ_2 mit K', so ist:

$$\frac{T_2^2 - T_1^2}{\tau_2^2 - \tau_1^2} = \frac{f+k}{f}. \qquad (4)$$

Dabei kann das ursprüngliche Trägheitsmoment K bei den Schwingungen mit und ohne Substanz verschieden sein, man kann daher durch geeignete Wahl des Trägheitsmomentes stets erreichen, daß die Schwingungen nicht zu rasch erfolgen.

Ist die Schwingung eine gedämpfte, so läßt sich der Anteil der Dämpfung durch Beobachtung des log. Dekrementes berücksichtigen.

3. Die zeitliche Änderung des Elastizitätsmoduls und die Anwendung derselben zur Beobachtung des Verlaufes des Koagulationsprozesses. — Über die zeitliche Änderung des Scherungsmoduls habe ich eine Reihe von Versuchen angestellt und eine Versuchsreihe in den Berichten mitgeteilt. Die Beobachtung der zeitlichen Änderung schien mir deshalb von Interesse, da die Elastizität [1]) einer Gelatinelösung zur Beobachtung des Verlaufs des Koagulationsprozesses dienen kann. Denn zur Bestimmung der Reaktionsgeschwindigkeit eines chemischen Vorganges kann jede physikalische Eigenschaft dienen, die nur einer der auftretenden Komponenten der Reaktion (in merklichem Grade) zukommt, und deren Größe von der Konzentration der betreffenden Komponente abhängt. Es kann daher die Elastizität der Gelatinelösung zur Bestimmung des Reaktionsverlaufes bei der Koagulation dienen, wenn sie diesen beiden Bedingungen genügt. Die Erfahrung lehrt, daß die Elastizität von Gelatinelösungen von der Konzentration abhängt und daß in einer Gelatinelösung unmittelbar nach der Herstellung keine Elastizität mit der statischen Methode nachzuweisen ist, daß dagegen die nach dieser Methode gemessene Elastizität im Laufe der Zeit wächst und sich einem konstanten Werte nähert. Aus dieser Beobachtung darf man keineswegs schließen, daß die ursprüngliche Gelatinelösung keine Elastizität besitzt, dieselbe kann sogar sehr beträchtlich sein. Man kann nach diesem Versuch lediglich sagen, daß die Relaxationszeiten [1]) aller in der ursprünglichen Lösung vorhandenen Komponenten so klein sind, daß die statische Methode keinen Nachweis ihrer Elastizität gestattet. Von den Umwandlungsprodukten aber besitzt jedenfalls eines eine so große Relaxationszeit, daß ein Nachweis der Elastizität auf diesem Wege gelingt. [2])

Die Beurteilung des Reaktionsverlaufes wird durch zwei Umstände wesentlich erschwert. Einmal ist der Geschwindigkeitskoeffizient der Koagulation (k) sehr klein, so daß der beobachtete Wert x auch nach sehr langer Zeit von dem theoretisch nach $t = \infty$ erreichten Endwert $x = a$ erheblich abweicht. Ferner ist bei der Beobachtung der Zeitpunkt, in dem die Reaktion einsetzt, nicht gegeben, da im Anfang des Prozesses starke Temperaturänderungen dadurch bedingt sind, daß die Lösung warm in den Apparat gegossen wird.

Es muß daher einerseits der Endwert a aus

1) P. von Schröder (Zeitschr. f. phys. Chem. **45**, 75, 1903) hat gefunden, daß die innere Reibung von Gelatinelösungen charakteristisch ist für ihren Zustand. Die innere Reibung läßt sich jedoch nur bei flüssigen Gelatinelösungen anwenden. Es können daher nach dieser Methode nur sehr verdünnte Gelatinelösungen und diese nur im Anfangsstadium der Koagulation untersucht werden.

1) Relaxation ist die Erscheinung, vermöge deren eine im Inneren einer Substanz vorhandene Spannung nicht bestehen bleibt, sondern im Laufe der Zeit verschwindet. Die Relaxationszeit ist die Zeit, in der die innere Spannung auf $1/e$ des ursprünglichen Wertes sinkt. Man vgl. dazu J. Cl. Maxwell, Phil. Mag. (4) **35**, 129, 1868.

2) Nach G. Quincke hat man sich den Aufbau des Kolloids und den Koagulationsprozeß in der folgenden Weise vorzustellen: Jedes organische Kolloid bildet mit Wasser eine wasserarme Lösung A von großer Viskosität und eine wasserreiche Lösung B von kleiner Viskosität. Unter dem Einfluß der verschiedenen Oberflächenspannungen bildet die ölartige wasserarme Lösung A in der wasserreichen B desselben Kolloids hohle Blasen und aneinanderliegende Schaumwände und Schaumkammern. Die wässerigen Lösungen der organischen Kolloide gerinnen zu einer flüssigen Gallerte, wenn die flüssigen Lamellen in der ölartigen wasserarmen Kolloidlösung zu flüssigen Schaumwänden zusammenfließen. Erstarren die flüssigen Schaumwände, so geht dadurch die flüssige Gallerte in steife über. (Vgl. hierzu Ann. d. Phys. **10**, 673, 1903, sowie Autorreferat in d. Fortschr. d. Phys. im Jahre 1903, **59**, I, 210.)

den Beobachtungen berechnet werden, und andererseits können zu allen Berechnungen keine absolut beobachteten Zeiten, sondern nur Zeitdifferenzen verwandt werden.

Um zu prüfen, ob die für den zeitlichen Verlauf maßgebende Reaktion eine unimolekulare ist, kann man in der folgenden Weise verfahren:

Man nimmt aus der Kurve, bei der die beobachteten Werte $x = \sqrt{\delta/\omega}$ [1]) als Ordinaten und die Zeit t als Abszissen aufgetragen sind, drei Werte x_1, x_2, x_3, für die

$$t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \tau$$

ist, dann läßt sich entweder a berechnen aus

$$a = \frac{x_2^2 - x_1 x_3}{2x_2 - (x_1 + x_3)}$$

oder k aus

$$e^{k\tau} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2}.$$

Führt man diese Berechnung für verschiedene Zeiten durch, so zeigt sich, daß der berechnete Wert von a mit der Zeit wächst, wobei die im Anfang der Koagulation berechneten (virtuellen) Werte von a kleiner sind als die nach langer Zeit beobachteten Werte x. Daraus sowie aus den direkt berechneten Werten von k ergibt sich eine Abnahme von k mit der Zeit.[2])

Dies beweist noch nicht, daß wir es mit keiner unimolekularen Reaktion zu tun haben, es ist noch möglich, daß eine unvollständig verlaufende Reaktion vorliegt.

Der Hinweis, daß die elastischen Eigenschaften der Gelatinelösung zur Untersuchung des Reaktionsverlaufes bei der Koagulation dienen können, möge hier genügen, im übrigen sei auf die Versuchsresultate von Herrn Lampe[3]) verwiesen, der die Fortführung der Versuche über Koagulationsgeschwindigkeit übernommen hat.

4. Untersuchung einer koagulierten Lösung nach der statischen und dynamischen Methode. — Im folgenden soll eine Lösung untersucht werden, die, solange eine bestimmte Grenze nicht überschritten wird, sich wie ein vollständig elastischer Körper verhält. Es ist dies erst der Fall, wenn die Koagulation weiter fortgeschritten ist. Das Anfangsstadium der Koagulation sowie aus irgend einem Grund schlecht koagulierte Lösungen sollen zunächst aus dem Bereich der Beobachtung ausgeschlossen sein.

Bestimmt man die Direktionskraft der Gelatine nach der statischen und dynamischen Methode, so zeigen die nach beiden Methoden gefundenen Werte der Direktionskraft beträchtliche Unterschiede.

Bei den Beobachtungen nach der dynamischen Methode wurde darauf geachtet, daß die Spannung des Aufhängedrahtes die gleiche war bei den Schwingungen mit und ohne Substanz zwischen A und B. Bei der im folgenden mitgeteilten Versuchsreihe hatte das innere Gefäß einen Radius von 3,62 cm; da in diesem Falle die Spannung des Drahtes durch den Auftrieb stark beeinflußt wird, so wurden die Schwingungen des freien Systems nicht in Luft, sondern in Wasser beobachtet. Die Spannung konnte in diesem Falle als gleich angesehen werden, da der Auftrieb der Gelatine bei der geringen Konzentration (0,5 Proz.) sich wenig von der des reinen Wassers unterschied. Die von der Elastizität des Wassers herrührende Direktionskraft ist jedenfalls so klein, daß die Wirkung bei der Versuchsanordnung sicher unter den Grenzen der Beobachtungsfehler liegt.

In Tabelle 1 sind für verschiedene Drehungswinkel φ die zusammengehörigen Werte von δ und ω in Minuten gegeben und das Verhältnis δ/ω. Tabelle 2 enthält die Beobachtungen nach der dynamischen Methode. Dabei dienten zur Änderung der Schwingungsdauer des schwingenden Systems aufgesetzte zylindrische Gewichte. Die Tabelle gibt die zusammengehörigen Werte von τ und T und das Verhältnis der beiden Größen.

Tabelle 1.

2δ	2ω	$\frac{\delta}{\omega}$
139,1	2,9	48,0
551,6	11,5	48,0
818,5	17,0	48,1
277,7	5,8	47,9

Tabelle 2.

T	τ	$\frac{T}{\tau}$
11,46	1,56	7,35
14,84	2,01	7,38
17,58	2,38	7,39

Aus dem Mittelwert 7,37 in Tabelle 2 berechnet sich $k/f = 53{,}3$, während der Mittelwert für den nach der statischen Methode bestimm-

1) A. Leick (Ann. d. Phys. **14**, 139, 1904) findet, solange die Konzentration c nicht sehr groß ist, $\frac{E}{c^2} = \text{const.}$

2) Erwähnt möge noch werden, daß für den Fall einer bimolekularen Reaktion die aus

$$a = \frac{x_2(x_1 + x_3) - 2x_1x_3}{2x_2 - (x_1 + x_3)}$$

berechneten Werte von a auch für die Anfangswerte Größen ergeben, die weniger von dem nach sehr langer Zeit beobachteten Werte abweichen, als dies bei der unimolekularen Reaktion der Fall ist. Es ist daher möglich, daß ein bimolekularer Vorgang die Geschwindigkeit des Reaktionsverlaufes bedingt.

3) Ein Bericht über die Resultate dieser Untersuchungen wird in nächster Zeit erscheinen.

ten Wert von $k/f = 48{,}0$, also kleiner ist. Wird der Wert k/f für die dynamische Methode nach Formel (4) berechnet, so ergibt sich ein etwas größerer Wert 55,0.

Die Dämpfung ist bei der Berechnung nicht berücksichtigt, ihr Einfluß ist klein. Für die Schwingungen in Wasser ist das Verhältnis der gedämpften Schwingungsdauer zu der ungedämpften kleiner als 1,0001, für die Schwingungen in Gelatinelösung kleiner als 1,0004.

Die Erscheinung, daß der dynamisch ermittelte Wert der Direktionskraft größer ist als der statisch bestimmte, wurde auch bei anderen Konzentrationen beobachtet.

Bestimmt man den Modul eines Drahtes aus der Torsion und aus Torsionsschwingungen, so ergibt sich nach Beobachtungen von E. Warburg[1]), daß der aus den Schwingungsbeobachtungen gefundene Wert des Moduls stets größer ist als der nach der statischen Methode gefundene. Die beiden Werte des Scherungsmoduls weichen also bei koagulierten Gelatinelösungen in demselben Sinn voneinander ab wie bei den übrigen elastischen Medien. Die Abweichung bei Gelatinelösungen ist jedoch weit beträchtlicher. Es dürften dabei Nachwirkungserscheinungen eine Rolle spielen.

5. Untersuchung einer unvollkommen koagulierten Lösung nach der statischen und dynamischen Methode. — Die im folgenden mitgeteilten Versuche beziehen sich auf eine Gelatinelösung, die nur unvollkommen koagulierte.[2]) Es traten bei dieser Lösung starke Nachwirkungserscheinungen auf, die quantitative Beobachtungen erschwerten.

Der Unterschied zwischen dem statisch und dynamisch ermittelten Werte der Direktionskraft ist hier noch wesentlich größer.

Nach der statischen Methode zeigt sich ein ständiger Rückgang des Ausschlages δ. Der momentane statische Ausschlag bei der Deformation ist nicht zu ermitteln, da das System BD zunächst Schwingungen um die neue Gleichgewichtslage ausführt. Aus der Beobachtung dieser Schwingungen folgt, daß in der ersten Zeit sehr starke Verschiebungen der Gleichgewichtslage auftreten. Berechnet man aus den beobachteten Umkehrpunkten und dem beobachteten Dämpfungsverhältnis die Gleichgewichtslage, so erhält man Werte, die den nach der dynamischen Methode ermittelten Werten näher kommen.

Für die dynamische Methode, die in solchen Fällen zur Untersuchung der elastischen Eigenschaften geeigneter erscheint, wird die quantitative Beobachtung dadurch erschwert, daß die gewöhnliche Theorie der gedämpften Schwingungen sich nicht mehr anwenden läßt. Für diese genügt die Beobachtung des Dämpfungsverhältnisses (log. Dekrements) und der Schwingungsdauer, die beide konstante Größen sind.

Bei der unvollkommen koagulierten Lösung trifft keine dieser Voraussetzungen mehr zu. Das Dekrement und die Schwingungsdauer sind von der Amplitude abhängig.

Das Dämpfungsverhältnis nimmt mit zunehmender Amplitude ab.

Dies zeigt Tabelle 3, in der die Dämpfungsverhältnisse für aufeinander folgende Schwingungsbögen a_1, a_2, a_3, a_4 gegeben sind.

Tabelle 3.

a_1	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{a_2}{a_3}$	$\frac{a_3}{a_4}$
354	1,86	2,01	2,05
271	1,86	2,13	2,20
171	1,94	2,25	2,32

Da das Dämpfungsverhältnis aus zwei direkt nacheinander beobachteten Schwingungsbögen berechnet ist, so treten die Beobachtungsfehler in diesem Falle sehr stark hervor. Die angegebene Messungsreihe soll daher nur den Gang der Erscheinung geben.

Dieselbe Erscheinung wurde von H. Garrett[1]) bei flüssigen Gelatinelösungen beobachtet.

Bei der unvollkommen koagulierten Lösung macht sich noch ein weiterer Umstand geltend:

Die Schwingungsdauer nimmt mit zunehmender Amplitude zu.

Beobachtet man den Zeitverlauf zwischen zwei aufeinanderfolgenden Umkehrpunkten, so treten die Beobachtungsfehler sehr stark hervor. Es wurde daher der erste Ausschlag und die Zeitdauer, die zwischen vier Umkehrpunkten liegt, beobachtet. Auch in diesem Falle machen die Beobachtungsfehler sich noch stark geltend, doch gibt Fig. 2 ein Bild des Ganges der Erscheinung. Es sind als Ordinaten die ersten Schwingungsbögen in Skalenteilen und die Zeitdauer von vier Schwingungen als Abszissen angetragen.

Wahrscheinlich wird das Verhalten der Gelatinelösung auch durch Größe und Geschwindigkeit der vorhergehenden Deformation beeinflußt, so daß wir es mit einem sehr verwickelten Vorgang zu tun haben.

Es dürfte jedoch die oben beschriebene dynamische Methode sich zum quantitativen Studium der elastischen Nachwirkung aus dem Grunde besonders eignen, da sie gestattet, Sub-

1) E. Warburg, Wied. Ann. **10**, 13, 1880.

2) Dies kann z. B. durch anhaltendes Kochen bewirkt werden. Vergl. E. Fraas, Wied. Ann. **53**, 1074, 1894 und P. v. Schröder, a. a. O.

1) H. Garrett, Dissertation, Heidelberg 1903. — Über den Einfluß der Amplitude auf das Dämpfungsverhältnis bei der Nachwirkung der Torsionsschwingungen von Drähten s. Winkelmann, Handb. d. Phys. 1, 338, 1891.

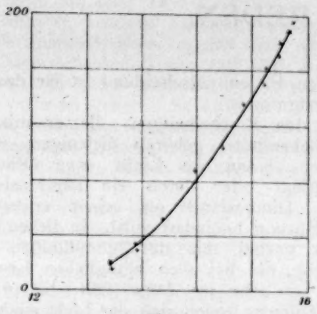

Fig. 2.

stanzen zu untersuchen, die sehr starke Nachwirkungserscheinungen zeigen, so daß bei ihnen der Einfluß der Luftreibung und der Beobachtungsfehler auf die Versuchsresultate klein ist.

6. Anwendung der dynamischen Methode zum Nachweis der Elastizität zähflüssiger Substanzen. — Nach den Versuchen von Schwedoff und Colin[1]) scheint es, daß nur Gelatinelösungen eine Gestaltselastizität besitzen, daß aber allen anderen Flüssigkeiten keine Gestaltselastizität zukommt. Das ganze Verhalten einer koagulierten Gelatinelösung spricht jedoch dafür, daß diese nicht als Flüssigkeit[2]), sondern als typisch fester Körper aufzufassen ist.

Ist die Gelatinelösung nicht koaguliert, so verhält sie sich wie die übrigen Flüssigkeiten, d. h. mit der statischen Methode ist keine Elastizität nachzuweisen. Dies ist auf die Erscheinung der Relaxation zurückzuführen. Für die Flüssigkeiten sind die Relaxationszeiten sehr klein. Für eine Reihe von Flüssigkeiten, in denen Doppelbrechung[3]) beobachtet wurde, berechnet Natanson[4]) aus den Versuchen von G. de Metz und Umlauf die Relaxationszeiten und findet für Rizinusöl 0,0013 sec und für Lösungen von Tragant und Kollodium Werte von derselben Größenordnung.

Für die Auffassung der Gelatine als festen Körper spricht die schon von Schwedoff gefundene Tatsache, daß sich die von ihm untersuchte 0,5 Proz.-Gelatinelösung innerhalb eines gewissen Bereiches (Elastizitätsgrenze) wie ein vollkommen elastisches Medium verhielt. Dies tritt noch deutlicher hervor, wenn die Koagulation weiter fortgeschritten ist, da dann die Elastizitätsgrenze wesentlich höher liegt als bei den Versuchen von Schwedoff.

Relaxation tritt nach Schwedoff erst oberhalb dieser Grenze ein, und er bestimmt die Relaxationszeit zu 823 sec. Sie liegt also jedenfalls wesentlich höher als die von Natanson für Flüssigkeiten gefundenen Werte, wenn man zunächst ganz davon absieht, daß bei der Versuchsanordnung von Schwedoff Relaxation und Nachwirkung sich nicht trennen lassen.[1])

Die elastische Reaktion der koagulierten Gelatinelösung bei der statischen Methode rührt also daher, daß dieselbe als fester Körper aufzufassen ist. Bei den Flüssigkeiten, die Doppelbrechung zeigen, erklärt sich das Fehlen jedes elastischen Effekts bei der statischen Methode aus der Größe der Relaxationszeit, wie sie die Berechnungen von L. Natanson ergeben haben.

Die statische Methode versagt selbst bei Flüssigkeiten mit größerer Relaxionszeit, so z. B. bei zähflüssigen Kolophonium-Terpentinölgemischen, bei denen eine aperiodische Rückkehr des tordierten Drahtes in die Gleichgewichtslage zu beobachten ist, dagegen läßt sich mit der dynamischen Methode ein Nachweis der Gestaltselastizität in diesem Fall erbringen.

Erwärmt man eine Kolophonium-Terpentinölmischung bis zu einer Temperatur, bei der sie leichtflüssig ist, so daß das System BD (in Fig. 1) nur wenig gedämpfte Schwingungen ausführt, so zeigt sich, daß mit abnehmender Temperatur einerseits ein Wachsen des log. Dekrements, andererseits eine Abnahme der Schwingungsdauer zu beobachten ist. Die Zunahme des Dekrements rührt von der Zunahme der Reibung her. Die Schwingungsdauer einer gedämpften Schwingung ist an und für sich größer als die der ungedämpften, und ebenso bewirkt die Vergrößerung des Trägheitsmomentes durch die Flüssigkeit eine Vergrößerung der Schwingungsdauer. Die Abnahme der Schwingungsdauer kann nur von einer Vergrößerung der Direktionskraft, also von einer elastischen Reaktion der Flüssigkeit herrühren.

Die dynamische Methode gibt mithin die Möglichkeit nachzuweisen, daß zähe Flüssigkeiten eine Gestaltselastizität besitzen.

1) Th. Schwedoff, a. a. O. — J. Colin, C. R. **116**, 1251, 1893.

2) Vgl. auch J. Colin, a. a. O.

3) Literaturangaben s. bei G. de Metz, La double Réfraction accidentelle dans les liquides. Scientia Nr. 26. Paris 1906.

4) L. Natanson, Zeitschr. f. physik. Chem. **39**, 355, 1902.

1) Vgl. hierzu Ber. der phys. med. Soz. in Erlangen **38**, 214, 1906.

Erlangen, Physik. Institut der Universität. Juli 1907.

(Eingegangen 7. Juli 1907.)

VORTRÄGE UND REDEN.

Das Licht und die Struktur der Materie. [1])

Von H. A. Lorentz.

Unter den Hilfsmitteln, welche die Physik den Medizinern und Biologen verschafft hat, darf das Mikroskop an erster Stelle genannt werden; jede Verbesserung desselben hat eine Ernte von neuen Entdeckungen gezeitigt, und durch die Grenze, bis zu welcher die Leistungsfähigkeit des Mikroskops gesteigert werden kann, wird in mancher biologischen Untersuchung der Umfang des Erreichbaren bestimmt. Es wird daher, wie ich hoffe, dem Ziel dieser Versammlung entsprechen, wenn ich mir gestatte, Ihre Aufmerksamkeit auf die letzten Erweiterungen des Gebietes mikroskopischer Untersuchung zu lenken; einige Bemerkungen über die Bedeutung optischer Erscheinungen für unsere Einsicht in die Struktur der Materie werden sich hierbei von selbst anschließen.

Wenn von dem modernen Mikroskop die Rede ist, denken wir sofort an Abbe und seine Anwendung der Theorie der Lichtschwingungen auf die Entstehung des optischen Bildes bei der mikroskopischen Beobachtung. Die Vorstellungen, die hierbei in Anwendung gekommen sind, stammen zum Teil von Christian Huygens, zum Teil auch von späteren Physikern, namentlich von Fresnel. Was der Lichttheorie von Huygens durch seine Nachfolger hinzugefügt werden mußte, war die Erkenntnis, daß man es nicht, wie er glaubte, mit der Fortpflanzung einzelner Stöße oder zusammenhangsloser Gleichgewichtsstörungen zu tun hat, sondern mit einer regelmäßigen Aufeinanderfolge von Schwingungen, deren Anzahl pro Sekunde die Farbe bestimmt; sie beträgt für das rote Licht ungefähr 400 Billionen, für das violette ungefähr 750 Billionen pro Sekunde. Mit der Zahl der Schwingungen hängt die Wellenlänge des Lichtes zusammen, der Abstand, um den man längs des Strahles fortschreiten muß, um denselben Schwingungszustand wiederzufinden, ein Abstand, den man vergleichen kann mit demjenigen zwischen zwei Wellenbergen auf einem Wasserspiegel, und der bei den eben genannten Lichtsorten ungefähr 0,8 und 0,4 Mikron beträgt, d. h. 0,8 und 0,4 von einem Tausendstel Millimeter. Fresnel zeigte, daß gerade diese Wellenlänge in vielen Fällen entscheidend ist für das, was man wahrnimmt.

Zu den Erscheinungen, die er mit Vorliebe behandelte, gehören diejenigen, welche auftreten, wenn das Licht enge Öffnungen durchdringt oder durch ein Hindernis von kleinen Dimensionen an seiner ungestörten Fortpflanzung behindert wird. In diesen Fällen ist es vorbei mit der geradlinigen Fortpflanzung, die bei allen alltäglichen Erscheinungen so sehr ins Auge fällt; hinter einer engen Öffnung breitet sich das Licht auch nach Richtungen aus, die von der Verlängerung der einfallenden Strahlen abweichen, und ein kleines undurchsichtiges Objekt wird von den Lichtwellen in ähnlicher Weise umspült, wie Wasserwellen einen Pfahl umspülen können. Solche Beugungs- oder Diffraktionserscheinungen sind es nun, womit man es, wie Abbe und auch Helmholtz zeigten, bei der mikroskopischen Beobachtung zu tun hat.

Obschon bei Huygens noch von keinen Beugungserscheinungen die Rede ist, können wir doch seinen Namen in einer Hinsicht mit der heutigen Theorie des Mikroskops und auch mit einigen andern Fragen in Verbindung bringen, die ich berühren werde. In seinem Traité de la lumière findet man das Prinzip auseinandergesetzt, dessen man sich noch stets in diesen Theorien bedient, und das darauf hinausläuft, daß sich die Lichtschwingungen von jedem Punkt aus, den sie getroffen haben, nach allen Seiten ausbreiten, daß also jeder derartige Punkt als ein neues Schwingungszentrum angesehen werden kann. Hierdurch wird es begreiflich, daß von den verschiedenen Punkten einer Öffnung das Licht auch zu den Stellen gelangt, die bei geradliniger Fortpflanzung im Dunkeln bleiben würden, und daß die Schwingungen, wenn sie in den Punkten an beiden Seiten von einem undurchsichtigen Hindernis angelangt sind, von dort aus den Raum hinter diesem Hindernis erreichen können.

Die Anwendung dieses Prinzips auf die Entstehung des Bildes im Mikroskop führte zu merkwürdigen Folgerungen, die durchaus durch die Beobachtung bestätigt wurden. Von vollkommen scharfen Bildern in dem Sinne, daß das von einem bestimmten Punkte des Objekts ausgehende Licht in einem einzigen Punkte der Bildebene vereinigt würde, ist keine Rede. Im Gegenteil, die Schwingungen, die von einem leuchtenden Punkte ausgehen, werden über einen gewissen Bereich verbreitet; der Punkt wird nicht als ein Punkt, sondern als ein kleines Lichtscheibchen abgebildet.

1) Rede, gehalten am 7. April 1907 bei der Eröffnung des 11. niederländischen naturwissenschaftlichen und medizinischen Kongresses (Natuur- en Geneeskundig Congres) zu Leiden.

Die Folge ist, daß zwei Lichtpunkte, die in sehr kleinem Abstand voneinander liegen, im Bilde ineinanderfließen, so daß man sie nicht mehr unterscheiden kann, und daß im allgemeinen sehr feine Details des Objektes im Bilde verloren gehen. So setzt die Natur des Lichtes selbst der auflösenden Kraft des Mikroskops eine Grenze, und zwar ist es gerade die Wellenlänge, durch welche diese Grenze bestimmt wird.

Sind übrigens alle Umstände so günstig wie möglich, dann kann man sagen, daß Punkte, deren Abstand einige Wellenlängen beträgt, deutlich voneinander unterschieden werden können, und daß Gegenstände von solcher Größe wirklich abgebildet, in ihrer wirklichen Gestalt gesehen werden können. Dagegen ist an eine genaue Abbildung von Objekten oder Strukturen mit Dimensionen, die gleich einem Bruchteil der Wellenlänge sind, nicht zu denken. Ein Glück, daß, wie ich bereits sagte, die Wellenlänge so klein ist! Sie beträgt für die Strahlen, die im Sonnen- oder Tageslicht die größte Intensität besitzen, ungefähr 550 Millionstel Millimeter, und wenn wir über die Grenzen der Auflösungskraft eines Mikroskops sprechen, haben wir also auf jeden Fall an Dimensionen etwas unterhalb eines Mikrons zu denken. Daß eine Abbildung von viel kleineren Körpern nicht zu erwarten ist, sieht man übrigens unmittelbar ein, wenn man bedenkt, daß wir einen Gegenstand bloß sehen können durch die Veränderungen, die er in die Ausbreitung der Lichtschwingungen bringt; es kann daher von der Wahrnehmung nicht viel zustande kommen, wenn die Wellen den Gegenstand allzusehr umspülen.

Mittel, durch welche das Auflösungsvermögen vergrößert werden kann, und die denn auch mit gutem Erfolge angewandt worden sind, ergeben sich nunmehr von selbst. Eins unter ihnen ist die Verwendung der sogenannten Immersionssysteme, bei denen der Raum zwischen dem Objekt und dem Objektiv des Mikroskops mit Wasser oder einer anderen, stärker lichtbrechenden Flüssigkeit angefüllt ist. Obschon das Objekt durch das Deckglas von der Flüssigkeit getrennt ist, läuft die Sache ziemlich auf das gleiche hinaus, als ob es in der Flüssigkeit läge, und man hat nicht mehr mit der Wellenlänge in der Luft, sondern mit der in der Flüssigkeit zu rechnen. Wenn man weiß, daß diese in Wasser $^3/_4$ der Wellenlänge in Luft beträgt, und z. B. in Zedernholzöl $^2/_3$ derselben, dann kann man sich deutlich machen, wieviel weiter man es mit einem Immersionssystem bringen kann als mit einem Trockensystem.

Ein zweites Mittel besteht in dem Gebrauch von ultravioletten Strahlen, die sich, wie Ihnen bekannt ist, durch eine kleinere Wellenlänge von den Lichtstrahlen unterscheiden; sie wirken zwar nicht auf unsere Netzhaut ein, allein man kann die Bilder, die durch sie erzeugt werden, mit Hilfe der Photographie festlegen. Die Schwierigkeiten bei der Verwendung dieser Strahlen, sind in den letzten Jahren durch Köhler — einen der wissenschaftlichen Mitarbeiter des Zeißschen Instituts —, unter Mitwirkung von v. Rohr, überwunden worden. Ich will von seiner langjährigen und mühsamen Arbeit nur so viel sagen, daß ein ganz neues Mikroskop konstruiert werden mußte. Die Linsen bestehen nicht aus Glas, das die ultravioletten Strahlen zu wenig durchläßt, sondern aus Bergkristall, diejenigen, worauf es am meisten ankommt, aus dem amorphen Quarz, der durch Schmelzen im elektrischen Ofen erhalten wird. Was das Licht betrifft, — wenn ich es noch so nennen darf — so wird es von kräftigen elektrischen Funken zwischen zwei Drähten aus dem Metall Kadmium geliefert; die von ihnen ausgehenden Strahlen werden durch einen Spektralapparat zerlegt, und nur diejenigen, welche eine ziemlich scharfe Linie im Ultraviolett geben, zur Beleuchtung des Objekts verwendet.

Die Wellenlänge dieses Lichts beträgt 275 Millionstel Millimeter, gerade die Hälfte der Zahl, die ich soeben für das Sonnenlicht angab. Die hierauf gegründete Erwartung, daß die Auflösungsfähigkeit ungefähr verdoppelt sein sollte, bestätigt sich in der Tat.

Die Strahlen, mit denen Köhler arbeitet, besitzen noch lange nicht die kleinste Wellenlänge, die man kennt. Es gibt deren solche mit einer Wellenlänge von ungefähr 100 Millionstel Millimeter; und könnte man diese benutzen, dann würde man es also noch beinahe dreimal soweit bringen können. Leider besteht wenig Aussicht, Linsen anzufertigen, die für diese Strahlen noch ziemlich durchlässig sind, und es scheint wohl, daß mit Bezug auf das wirkliche Abbilden von Gegenständen die äußerste Grenze erreicht ist.

Von dem Mikroskop für ultraviolettes Licht können wir übergehen zu der Ultramikroskopie, der vielen von Ihnen wohlbekannten Beobachtungsmethode, die man Siedentopf und Zsigmondy verdankt, und an deren Entwickelung auch die französischen Forscher Cotton und Mouton einen bedeutenden Anteil gehabt haben. Der Grundgedanke hierbei ist, daß wir ein Objekt, das zu klein ist, um abgebildet zu werden, — was wir aber jetzt auch nicht mehr verlangen — doch noch sehen können; falls nur genug Licht von ihm ausgeht, werden wir es als ein Diffraktionsscheibchen wahrnehmen können.

Neu und ungewohnt ist dies übrigens nicht.

Die Fixsterne sind zu weit entfernt, um noch in unserm Auge oder in einem Fernrohr so abgebildet werden zu können, daß wir ihre Details unterscheiden können; wir sehen sie als „Lichtpunkte", d. h. als kleine Lichtfleckchen, deren Größe abgesehen von der Unvollkommenheit der Linsensysteme durch die Beugung bestimmt wird. Ebenso werden kleine Teilchen in einem festen Körper oder einer Flüssigkeitsschicht, die unter das Mikroskop gebracht worden sind, sichtbar, wenn sie von einem kräftigen Lichtbündel beschienen werden und nur groß genug sind, um nach dem Huyghensschen Prinzip das Licht so stark zu zerstreuen, daß jedes Teilchen schon für sich einen hinreichenden Lichteindruck zustande bringen kann. Wird dafür gesorgt — beispielsweise durch geeignete seitliche Beleuchtung —, daß die einfallenden Strahlen nicht direkt in das Instrument fallen, so sieht man die Teilchen als helle Punkte auf dunklem Hintergrund, gewissermaßen einen Sternhimmel im kleinen. Der Vergleich paßt auch insoweit, als der Abstand der nebeneinander liegenden Teilchen nicht zu klein sein darf; liegt er zu weit unterhalb der Wellenlänge, dann können die Teilchen des Schwarms nicht getrennt gesehen werden, und man erhält bloß eine gleichmäßige Erhellung des Feldes. Es ist hiermit wie mit der Auflösung eines Sternenhaufens.

Was das Licht der einzelnen Teilchen betrifft, so leuchtet es ein, daß dies von ihrer Größe abhängt und außerdem von ihren optischen Eigenschaften; je mehr sie in dieser Hinsicht von der Substanz, in die sie eingelagert sind, abweichen, um so mehr zerstreuen sie die einfallenden Strahlen. Daher kommt es, daß Stoffe, die sehr kleine Metallteilchen enthalten, für die ultramikroskopische Untersuchung besonders geeignet sind.

Siedentopf und Zsigmondy haben denn auch ihre neue Methode zuerst auf Glas angewandt, das durch eine kleine Menge Gold, vielleicht ein Zehntausendstel der ganzen Masse, gefärbt ist. Kennt man die Menge Goldchlorid, die bei der Herstellung der Glasmasse beigefügt ist, und zählt man die mit dem Ultramikroskop in einem gewissen Raumteil des Glases wahrgenommenen Lichtpünktchen, dann kann die Masse eines jeden Goldteilchens und also auch, mit Hilfe des spezifischen Gewichts des Metalls, die Größe der Teilchen gefunden werden. Es zeigte sich in dieser Weise, daß die kleinsten Teilchen, die man allerdings nur bei starkem Sonnenlicht an einem schönen Sommertage zu sehen bekommen kann, Dimensionen von 3 bis 6 Millionstel Millimeter besitzen. Da die Wellenlänge der von Köhler verwendeten ultravioletten Strahlen 275 Millionstel Millimeter beträgt, ist es wohl klar, daß an eine Abbildung dieser Goldteilchen nicht zu denken ist, daß sie wirklich ultramikroskopisch sind. Übrigens haben manche gefärbte Gläser zweifellos ihre Farbe noch kleineren Teilchen zu verdanken, bei denen auch das Ultramikroskop uns im Stich läßt.

Zum Vergleich kann dienen, daß die Blutkörperchen des Menschen einen Durchmesser von ungefähr 8 Mikron haben, mehr als das Tausendfache desjenigen der Goldkörnchen im farbigen Glase.

Die Untersuchungen mit dem Ultramikroskop haben bereits viel Licht verbreitet über die Struktur der in mancher Beziehung so merkwürdigen kolloidalen Substanzen, deren chemische Eigenschaften vor allen von van Bemmelen untersucht worden sind. Sehr überraschend ist, daß eine Menge früher für unlöslich angesehener Substanzen, wie Gold, Silber, Ferrioxydhydrat in sog. kolloidaler Lösung erhalten werden können, und man hatte schon lange vermutet, daß solche Lösungen sich von den gewöhnlichen dadurch unterscheiden, daß die Stoffe in ihnen in viel größeren Teilchen vorhanden sind; in der Tat war die Auffassung verteidigt worden, daß es einen stetigen Übergang gebe von den Lösungen im gewöhnlichen Sinne zu Flüssigkeiten, in denen Substanzen in fein verteiltem Zustand schweben. Es ist nun wirklich geglückt, in verschiedenen kolloidalen Lösungen die kleinen Partikeln mit dem Ultramikroskop zu unterscheiden.

Daß die neue Art zu beobachten viel für unsere Kenntnis derjenigen Kolloide verspricht, die wie die Eiweißstoffe eine große Bedeutung für die Lebenserscheinungen besitzen, braucht nicht gesagt zu werden; einige Schritte in dieser Richtung sind auch bereits gemacht worden. Es besteht ferner die Möglichkeit, daß die Existenz von Mikroben, die klein genug sind, um sich der gewöhnlichen mikroskopischen Wahrnehmung zu entziehen, auf diese Weise ans Licht gebracht werden kann, obgleich wir diese dann nicht nach ihrer Gestalt voneinander werden unterscheiden können. Ich glaube nicht, daß man bereits etwas Neues von dieser Art gefunden hat, aber wohl haben Cotton und Mouton die Mikrobe der Peripneumonie oder Pleuropneumonie des Rindes (dies ist der wissenschaftliche Name der Krankheit, die man im deutschen „Lungenseuche des Rindes", im holländischen „Lungenkrankheit des Rindes" nennt), in deren Kulturen das Mikroskop nicht mehr als eine ziemlich undeutliche Körnerbildung sehen läßt, in ihrem Ultramikroskop als gesonderte Lichtpünktchen wahrgenommen.

Flüssigkeiten, die ultramikroskopische Partikeln enthalten, zeigen eine Erscheinung, die

noch einen Augenblick unsere Beachtung verdient. Ich meine die seit langem bekannte Brownsche Bewegung schwebender Teilchen, die bei den sehr kleinen Körpern, von denen wir jetzt sprechen, besonders ins Auge fällt. Es ist ein unaufhörliches unregelmäßiges Durcheinanderwimmeln, vergleichbar dem Tanzen eines Mückenschwarms im Sonnenschein, wie Zsigmondy sich ausdrückt, und vom physikalischen Gesichtspunkte merkwürdig, weil es den Anschein hat, als sähe man hier eine unmittelbare Folge der schnellen, unregelmäßigen, bald hier- bald dorthin gerichteten Bewegung, die man seit langem den Molekülen, den kleinsten Teilchen, aus denen wir uns alle Körper aufgebaut denken, zuschreibt. Zufällige der Flüssigkeit mitgeteilte Erschütterungen oder Stöße, durch kleine Temperaturunterschiede erzeugte Strömungen, überhaupt äußere Einwirkungen können — das steht wohl fest — die Ursache der Erscheinung nicht sein. Wir müssen daher annehmen, daß die schwebenden Partikeln durch Kräfte in dem Objekt selbst, also durch Kräfte, die von dem umgebenden Wasser ausgehen, hin und her geworfen werden, und sobald wir wissen, daß die Wassermoleküle Geschwindigkeiten von Hunderten von Metern pro Sekunde besitzen, liegt es auf der Hand, an die Stöße zu denken, die sie auf die in ihrer Mitte befindlichen fremden Teilchen ausüben. Man kann sich nicht darüber wundern, daß man auf diese Weise in einer kolloidalen Goldlösung so etwas wie den Mückenschwarm zu sehen bekommt, von dem Zsigmondy spricht. Auch ist es begreiflich, daß ein Goldteilchen, weil es viel größer als die Wassermoleküle ist, sich viel langsamer als diese fortbewegt, so daß man es auf seinem Wege verfolgen kann, was bei den Molekülen selbst, auch wenn man sie einzeln sehen könnte, unmöglich wäre; diese bewegen sich hierzu viel zu schnell.

Ich muß hinzufügen, daß bei näherer Ausführung dieser Erklärung bedeutende Schwierigkeiten bestehen bleiben. Für unüberwindlich halte ich sie aber nicht, und man kann darauf hinweisen, daß es kaum denkbar ist, daß in einer Flüssigkeit, deren kleinste Teilchen in Ruhe sein sollten, suspendierte Körperchen unaufhörlich hin- und hergehen.

Verglichen mit den Wassermolekülen sind die Goldteilchen von Siedentopf und Zsigmondy von riesiger Größe, und auch, wenn wir die allerkleinsten ultramikroskopisch sichtbaren Körperchen mit den Molekülen von Substanzen vergleichen, die viel zusammengesetzter sind als Wasser, bleibt noch ein großer Abstand. Von dem Sehen der einzelnen Moleküle sind wir also noch sehr weit entfernt und wir dürfen nicht erwarten, daß es uns jemals gelingen wird. Die Lichtmenge, die von einem Molekül ausgeht, ist zu klein, um einen Eindruck auf unsere Netzhaut zu machen, und außerdem liegen die Moleküle zu nahe beieinander, um einzeln für sich gesehen zu werden.

Die Frage ist indes, ob nicht das durch alle die Moleküle zusammen zerstreute Licht sichtbar sein wird, und ob daher nicht jeder Körper, durch den ein Lichtbündel hindurchscheint, auch dann, wenn er ganz frei von Stäubchen ist, etwas derartiges zeigen muß, wie wir es in der Luft dieses Saales sehen würden, wenn ein Bündel Sonnenstrahlen hineinfiel und sich diese an dem schwebenden Staub abzeichneten. Lobry de Bruyn und Wolff haben aus ihren Versuchen den Schluß gezogen, daß in der Tat Körper von hohem Molekulargewicht durch den Einfluß ihrer Moleküle das Licht zerstreuen, und die Theorie lehrt, daß jeder Körper dies in stärkerem oder schwächerem Maße tun muß. Das nach allen Seiten geworfene Licht muß bei hinreichender Dicke der Schicht, von der es ausgeht, merklich werden, und die Schwächung der Strahlen, welche die notwendige Folge der Zerstreuung ist, muß sich bemerkbar machen, wenn man nur weit genug längs des Strahlenbündels fortschreitet.

Der interessanteste Fall ist derjenige der Atmosphäre. Wird vollkommen reine Luft, in der nicht das kleinste Staubteilchen oder Wassertröpfchen schwebt, allein wegen der molekularen Struktur nach Art eines feinen Nebels undurchsichtig werden? Rayleigh hat durch eine Berechnung die Frage beantwortet, und ich kann Ihnen seinen Gedankengang, einigermaßen nach modernen Auffassungen modifiziert, in wenig Worten angeben. Von dem Einfluß eines aus Molekülen zusammengesetzten Körpers auf ein Lichtbündel geben wir uns Rechenschaft, indem wir uns vorstellen, daß in jedem Molekül, selbst in jedem Atom, noch viel kleinere Teilchen vorhanden sind, die durch das Licht zum Mitschwingen gebracht werden. Ich muß hinzufügen, daß die Kräfte, die in einem Lichtstrahl wirksam sind, elektrischer Natur sind, und daß wir daher, um zu begreifen, daß die Lichtschwingungen diese kleinen Teilchen in Bewegung setzen können, ihnen elektrische Ladungen zuschreiben. Es sind die Elektronen, mit denen wir es gegenwärtig soviel zu tun haben.

Nach dem Huyghensschen Prinzip wird jedes Elektron, sobald es zum Mitschwingen gekommen ist, selbst der Mittelpunkt neuer Lichtwellen, und hierin liegt die Ursache der Zerstreuung, von der wir sprechen.

Wieviel diese nun beträgt, hängt nicht so sehr von den Dimensionen der Moleküle und

ihren Massen ab, als vielmehr von dem, was sich innerhalb jedes Moleküls abspielt, und hiervon kann man sich eine Vorstellung machen, wenn man das Brechungsvermögen des Körpers mißt, das seinerseits durch den Grad des Mitschwingens bestimmt wird. Kennt man den Brechungsindex, die Wellenlänge und die Zahl der Moleküle pro ccm, so kann man berechnen, wieviel von dem einfallenden Licht nach allen Seiten zerstreut wird, und wieweit ein Lichtbündel, das sich eine gewisse Strecke fortpflanzt, geschwächt wird. Für gelbes Licht und für Luft gewöhnlicher Dichte findet man, mit Hilfe dessen, was wir über die Anzahl Moleküle wissen, daß die Stärke eines Lichtbündels nach dem Durchlaufen von ungefähr 100 km auf die Hälfte gesunken ist.

Innerhalb der Entfernungen, in denen wir gewöhnlich sehen, kann also reine Luft wohl durchsichtig genannt werden, aber auf größere Entfernungen hin, wie sie in der Atmosphäre wirklich vorkommen, ist die Zerstreuung des Lichts durchaus nicht zu vernachlässigen. Die Strahlen eines Sterns im Zenith würden nach der Berechnung, die ich Ihnen skizzierte, wenn sie die Erdoberfläche erreichen, ungefähr 6 Proz. ihrer Intensität verloren haben. Wir können dies mit dem Ergebnis vergleichen, das man aus der Beobachtung der Lichtstärke bei verschiedenen Höhen eines Himmelskörpers abgeleitet hat; man hat daraus auf eine Abnahme von ungefähr 20 Proz. geschlossen.

Ein Beweis für die molekulare Struktur der Luft ist hiermit nicht geliefert, da man immer die Zerstreuung des Lichtes schwebenden Staubteilchen würde zuschreiben können. Wir müssen damit zufrieden sein, daß die Beobachtungen der Molekulartheorie nicht widersprechen. Unser Ergebnis, daß wir den dritten Teil der wahrgenommenen Zerstreuung den Luftmolekülen selbst zuschreiben dürfen, ist vielleicht so befriedigend, wie es erwartet werden konnte.

Ich muß noch darauf hinweisen, daß nach der Theorie von Rayleigh die Zerstreuung, die, sei es durch die Luftmoleküle selbst, sei es durch kleine schwebende Teilchen erzeugt wird, um so mehr betragen muß, je kleiner die Wellenlänge ist. In der stärkeren Zerstreuung der blauen Strahlen dürfen wir die Ursache für die blaue Farbe des Himmels sehen, und nach Rayleigh würde also auch wenn die Luft vollkommen rein wäre, der Himmel uns blau, sei es denn auch sehr dunkel, erscheinen. Wir würden die Luft noch wirklich sehen, und zwar würde die Sichtbarkeit darauf beruhen, daß sie aus Molekülen zusammengesetzt ist. In der Tat folgt aus der Formel, mit Hilfe deren die angeführten Zahlen gefunden worden sind, daß die Zerstreuung bei einem gegebenen Brechungsindex um so kleiner ist, je näher die Moleküle beieinander liegen, je „feinkörniger" also das Medium ist; in einem vollkommen homogenen und kontinuierlichen Medium würde die Zerstreuung ganz fortfallen.

So wie die Luft nach unserer Auffassung nun einmal ist, muß sie in Abständen von einigen Tausend Kilometern wie ein dichter Nebel wirken, und es würde traurig aussehen, wenn sie sich von der Erde bis zur Sonne erstreckte. Wir würden uns dann wahrscheinlich in tiefer Finsternis befinden und sicher die Sonne nicht sehen. Die, soweit wir wissen, vollkommene Durchsichtigkeit des Äthers, der den Himmelsraum erfüllt, legt es sehr nahe, diesem Medium keine körnige Struktur zuzuschreiben, worin sich denn auch viele Physiker einig sind.

Daß nun bei Substanzen wie Wasser, Glas, Quarz und Kalkspat kein Gedanke daran ist, den molekularen Bau durch eine Zerstreuung der Lichtschwingungen sichtbar zu machen, brauche ich kaum zu sagen. Aber es ist Ihnen wohl bekannt, wie das Studium der Lichterscheinungen uns auf indirektem Wege viel über diesen Bau und die Eigenschaften der kleinsten Teilchen lehren kann. Aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Strahlen suchen wir zu Folgerungen zu gelangen über die in den Molekülen anwesenden, zum Mitschwingen gebrachten Elektronen und über die Anordnung der Moleküle in Kristallen und organischen Geweben. Ferner führt uns die Richtungsänderung, die in manchen Stoffen die Schwingungen bei ihrer Fortpflanzung erfahren, zu den Vorstellungen, auf welche die zu so großer Entwickelung gelangte Stereochemie gegründet ist. Wieder in anderen Fällen lenken wir die Aufmerksamkeit auf die Absorption des Lichtes in nicht ganz durchsichtigen Stoffen; auch so kommen wir zu einigen Ergebnissen über die schwingenden Teilchen in den Molekülen und Atomen. Und am weitesten bringen wir es in dieser Hinsicht, wenn wir die Teilchen nicht durch von außen auffallendes Licht zum Mitschwingen bringen, sondern sie zu selbständigen Schwingungszentren machen, indem wir den Körper auf diese oder jene Weise Licht ausstrahlen lassen.

Aus dem Vielen, das wir alsdann aus der Untersuchung des Spektrums ableiten können, will ich jetzt bloß einiges herausgreifen.

Wenn ein Körper, der Lichtschwingungen bestimmter Periode aussendet, und also an einer bestimmten Stelle im Spektrum eine helle Linie gibt, sich dem Beobachter nähert, so wird die Anzahl Schwingungen, die pro Sekunde den Spalt des Spektroskops erreicht,

vergrößert; die Spektrallinie wandert ein wenig nach der Seite des Violett zu. Umgekehrt hat eine Bewegung der Lichtquelle von dem Beobachter weg eine Verschiebung der Linie nach dem Rot zur Folge. Dies sind die Verschiebungen der Spektrallinien, die man in manchen Fällen im Spektrum von Himmelskörpern beobachtet hat und aus denen man die Schnelligkeit ihrer Bewegung in der Richtung der Gesichtslinie ableitet.

Einen derartigen Einfluß einer Ortsveränderung der Lichtquelle auf die wahrgenommene Schwingungszahl hat man mit gutem Erfolge auch im Falle sich bewegender Moleküle oder Atome aufzufinden gesucht. Bei der elektrischen Entladung durch verdünnte Gase entstehen unter geeigneten Bedingungen die sogenannten Kanalstrahlen, die man mit gutem Grunde für Schwärme von positiv geladenen Atomen hält, die sich mit beträchtlicher Geschwindigkeit alle in gleicher Richtung bewegen. Von dem Raum, in dem sie dies tun, geht eine Lichtstrahlung aus. Prof. Stark in Hannover hat das Spektrum der nach verschiedenen Richtungen ausgesandten Strahlen untersucht und gefunden, daß die Linien um so mehr nach der Seite des Violett zu liegen, je kleiner der Winkel ist, den die Richtung des ausgesandten Lichtes mit derjenigen der Kanalstrahlen selbst bildet. Die Größe der Verschiebung stimmt gut mit der Schnelligkeit, die man aus andern Gründen den fortfliegenden Atomen glaubt zuschreiben zu müssen, und so ist es bewiesen, daß es wirklich diese Atome sind, welche als Schwingungszentren fungieren. Auch ist Stark zu dem für die Theorie der Strahlung wichtigen Ergebnis gekommen, daß bei vielen Elementen das Linienspektrum ausschließlich durch eine bestimmte Art von schwingenden Teilchen erzeugt wird, nämlich durch Teilchen, die im ganzen eine positive elektrische Ladung besitzen.

Auf einen andern und sehr allgemeinen Fall, auf den gleichfalls das von Stark benutzte Prinzip Anwendung findet, hat vor mehreren Jahren Michelson aufmerksam gemacht. Eine unregelmäßige Bewegung der Moleküle nach allen Richtungen, wie wir sie uns vorhin beim Wasser vorstellten, besteht auch in Gasen; in einem leuchtenden Gase denken wir uns daher zahllose hin- und herfliegende Schwingungszentren. Wird nun das ausgestrahlte Licht mit einem Spektroskop untersucht, und ist es derartig, daß eine vollkommen scharfe Spektrallinie erhalten würde, falls die Moleküle stillständen, dann wird wegen der Bewegung der Moleküle nach verschiedenen Richtungen das Licht von einigen unter ihnen etwas mehr nach der Seite des Violett, das von anderen etwas nach der Seite des Rot zu liegen kommen; die Spektrallinie erhält eine gewisse Breite. Michelson hat nachgewiesen, daß dies wirklich der Fall ist. Er hat nach einer sinnreich ausgedachten indirekten Methode die Breite gemessen und gefunden, daß ihr Betrag in Übereinstimmung ist mit dem zu erwartenden Werte, zu dem uns unsere Vorstellung über die Geschwindigkeit der Molekularbewegung führt. Schönrock, der in der letzten Zeit die Betrachtungen und Berechnungen Michelsons mit größerer Genauigkeit wiederholt hat, ist zu demselben Ergebnis gekommen, und wir dürfen jetzt wohl sagen, daß die Bewegung der Moleküle in derselben Weise wahrnehmbar wird, wie die Ortsveränderung der Sterne in der Richtung der Gesichtslinie.

Beispiele wie dieses sind wohl geeignet darzutun, daß, wenn auch die kleinsten Teilchen der Materie unsichtbar sind, Größen, die sich auf die einzelnen Moleküle beziehen, uns doch nicht so unzugänglich sind, wie man es sich zuweilen gedacht hat. Die merkwürdigste Erläuterung dieser Behauptung kann ich vielleicht der Theorie der Wärmestrahlung entnehmen. Stellen wir uns vor, daß dieser Saal vollkommen von undurchsichtigen Körpern abgeschlossen wäre, und daß die Wände und alle anwesenden Gegenstände die gleiche Temperatur hätten; dann würde die Luft, oder vielmehr der Äther, in allen Richtungen durchsetzt werden von Wärmestrahlen sehr verschiedener Wellenlänge, unter denen jedoch Strahlen einer bestimmten Wellenlänge vorherrschen würden. Man kann dies mit einem wirren Geräusch vergleichen, in dem eine Tonhöhe dominiert. Wir können jetzt einen kleinen Würfel ins Auge fassen, dessen Kanten die Länge jener am meisten vorkommenden Wellen haben, und auf die Menge Energie achten, die infolge der Strahlung in solch einer „kubischen Wellenlänge" vorhanden ist. Wer die Untersuchungen über die Wärmestrahlung aus den letzten Jahren verfolgt hat, kann kaum daran zweifeln, daß diese Energiemenge von derselben Größenordnung ist wie die kinetische Energie eines einzelnen Gasmoleküls bei der betrachteten Temperatur. Nun ist eine Wellenlänge eine sehr gut wahrnehmbare Größe, und so hat man die in einer kubischen Wellenlänge enthaltene Energie wirklich messen können, wodurch dann zugleich die eines Moleküls bekannt geworden ist. In der Tat ist dies einer der besten Wege, um zur Kenntnis der Größe von Molekülen und Atomen zu gelangen.

Die Betrachtungen, die ich mir gestattet habe Ihnen vorzutragen, sind eine Verteidigung der molekularen und atomistischen Theorien geworden, deren sich die Physiker so häufig

bedienen, um sich eine lebendige und klare Vorstellung von den Erscheinungen und ihrem gegenseitigen Zusammenhang zu bilden.

Mit Absicht habe ich mich hierbei nicht auf das Bedürfnis unseres Geistes berufen, in den in Frage stehenden kleinsten Teilchen der Materie einen Endpunkt für unsere Analyse der Erscheinungen zu finden. Man tut, glaube ich, recht daran, wenn man mit dem Hinweis auf ein derartiges Bedürfnis vorsichtig ist. Die Erfahrung lehrt ja, daß viele Theorien, in denen man sich die Materie kontinuierlich ausgebreitet denkt, uns durchaus befriedigen, daß mancher Physiker einer solchen Auffassung entschieden den Vorzug gibt und molekulare Betrachtungen am liebsten vermeidet, und daß viele, wie wir bereits sahen, kein Bedenken haben, den Äther als ein Kontinuum aufzufassen. Dies schließt nicht aus, daß, wenn in anderen Fällen die Atomistik sich mehr als alles andre geeignet zeigt, uns eine klare Einsicht zu verschaffen, dies nicht bloß an dem Wesen der Dinge außerhalb von uns, sondern auch an der Beschaffenheit unseres Geistes liegen muß, wie überhaupt das Begreifen einer Naturerscheinung eine gewisse Verwandtschaft zwischen ihr und dem Geist voraussetzt.

Wie man auch hierüber denken mag, die beste Verteidigung der Atomistik liegt schließlich in ihrer Fruchtbarkeit und Zweckmäßigkeit.

Gewiß, es gibt auf rein physikalischem Gebiet noch zahlreiche Schwierigkeiten, die ich, wie Sie mir wohl werden glauben wollen, nicht unerwähnt gelassen habe, damit alles recht schön aussehe, sondern nur, weil ich sie in der Tat bei dieser Gelegenheit schwerlich auseinandersetzen konnte. Indessen, wie schwerwiegend sie auch sein mögen, es ist unleugbar, daß wir einigen Erscheinungen, die ich jetzt besprochen habe und vielen andern, die ich hätte hinzufügen können, ohne Molekulartheorie so gut wie machtlos gegenüberstehen würden. Wer über das Tun und Lassen der Physiker ein Urteil fällen will, wird sich denn auch nicht der Verpflichtung entziehen können, sich mit solchen Erscheinungen bekannt zu machen, sich mehr oder weniger in sie zu vertiefen und eine Betrachtungsweise nicht zu verwerfen, ohne sich auch einmal die Frage zu stellen, durch welche andere man sie würde ersetzen können.

Vergessen wir bei der Beurteilung auch nicht, daß wir von der Realität einer ganzen Menge von Dingen überzeugt sind, die wir nicht so unmittelbar wahrnehmen wie einen Stein oder ein Stück Eisen, und deren Existenz wir annehmen, zwar auf Grund von Wahrnehmung, aber von Wahrnehmung, an die sich eine kürzere oder längere Reihe von Überlegungen angeschlossen hat. Niemand zweifelt daran, daß die Lichtpünktchen bei der ultramikroskopischen Beobachtung ebenso viele Goldteilchen repräsentieren, daß die Halos um Sonne und Mond feinen Eiskristallen hoch in der Atmosphäre zuzuschreiben sind, daß die chemischen Elemente unsrer Erde auf der Sonne und den fernsten Himmelskörpern angetroffen werden, und daß ein Stern, der nach der hin- und hergehenden Bewegung der Spektrallinien zu schließen, sich uns abwechselnd nähert und von uns entfernt, einen Kreis um einen anderen Himmelskörper beschreibt; es fällt niemandem ein, den Astronomen deshalb zu tadeln, daß er die Masse dieses vielleicht unsichtbaren Körpers aus seinen Wahrnehmungen ableitet. Recht betrachtet, gehen wir in unseren Annahmen über Moleküle und Atome lediglich in derselben Richtung einen Schritt weiter und brauchen wir von der Realität dieser Teilchen nicht so sehr viel weniger überzeugt zu sein, als von derjenigen der Eisnädelchen in der Atmosphäre.

Etwas andres, das Überlegung verdient, ist die reiche über alle Beschreibung gehende Organisierung der Materie. In einem Kubikzentimeter der uns umgebenden Luft liegen so viele Moleküle, daß ihre Zahl mit einigen zwanzig Ziffern geschrieben werden müßte. Während sie sich unaufhörlich durcheinander bewegen, immer und immer wieder aufeinander prallend, werden ihre Elektronen durch die zahllosen einander durchkreuzenden Licht- und Wärmestrahlen in Bewegung gesetzt und senden ihrerseits nach allen Seiten ihre Wellen aus. Nicht weniger, im Gegenteil wohl noch mehr verwickelt würde das Bild sein, das ein Milligramm eines Eiweißstoffes uns zu sehen geben würde, und so wird es, ich will nicht sagen begreiflich, aber etwas weniger wunderbar, daß äußerst kleine Mengen Materie die Träger einer bis in feine Einzelheiten gehenden Erblichkeit sein können.

Auch wenn wir es wagen, unsere Gedanken auf den Zusammenhang zwischen den körperlichen und den geistigen Erscheinungen zu richten, behalten wir die feine Organisierung der Materie im Auge. Ich bin weit davon entfernt, geistige Vorgänge auf Prozesse in der Materie zurückführen zu wollen; das Ungleichartige kann man nicht voneinander ableiten. Aber wohl kann man die Auffassung vertreten, daß jedem Zustand und jeder Tätigkeit unseres Geistes eine bestimmte Beschaffenheit und eine bestimmte Veränderung des Gehirns entspricht. Soll ein solches Sichkorrespondieren bis in die kleinsten Einzelheiten reichen, dann muß — dies ist klar — die Anzahl von Elementen, aus denen die Hirnsubstanz zusammengesetzt ist, ungemein groß sein. Wie groß sie sein muß, können wir nicht sagen; aber wenn wir wissen, daß ein Milli-

gramm Materie eine Anzahl Atome umfaßt, viel größer als die gesamte Zahl der Buchstaben in allen Büchern der Leidener Universitätsbibliothek und an den Reichtum an Gedanken denken, der in der Anordnung dieser Buchstaben enthalten ist, dann verstehen wir einigermaßen, daß wirklich die materiellen Veränderungen im Gehirn genügend Variation bieten können, um die Abspiegelung einer hohen und komplizierten Geistestätigkeit zu sein.

Aber ich würde Gefahr laufen, die Grenzen der Physik zu überschreiten, was nicht in meiner Absicht liegt, und nicht von Ihnen gewünscht werden kann. Der Physiker, und das gilt von uns allen, muß sich darauf beschränken, auf seine Weise in dem Buch der Welt zu lesen. Ohne sich durch die Erkenntnis niederdrücken zu lassen, daß der tiefe Sinn ihm verborgen bleibt, fühlt er sich in seinen Bestrebungen gestärkt durch die Überzeugung, daß sich ihm innerhalb der Grenzen des Erreichbaren, in dem Maße wie er fortschreitet, weite und unerwartete Ausblicke öffnen werden.

(Aus dem Holländischen übersetzt von F. Conrat.)

(Eingegangen 28. Juni 1907.)

BESPRECHUNGEN.

Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. V: Physik. 1. Teil, Heft 2, 3, 4; 2. Teil. Heft 2. Leipzig, B. G. Teubner. M. 16,60

Anschließend an die Mitteilung auf S. 470 Jahrg. 5, 1904 dieser Zeitschrift soll hier über die inzwischen erschienenen weiteren Artikel der mathematischen Enzyklopädie kurz berichtet werden. Es sind dieses aus dem Abschnitt Thermodynamik die Artikel:

4. Wärmeleitung. Von E. W. Hobson und H. Diesselhorst.
5. Technische Thermodynamik. Von M. Schröter und L. Prandtl,

und aus dem Abschnitt Molekularphysik:

6. Chemische Atomistik. Von F. W. Hinrichsen und L. Mamlock. Nebst einem Anhang von E. Study.
7. Kristallographie. Von Th. Liebisch, A. Schönflies und O. Mügge.
8. Kinetische Theorie der Materie. Von L. Boltzmann und J. Nabl.
9. Kapillarität. Von H. Minkowski.

Der Artikel Wärmeleitung zerlegt sich in einen mathematischen Teil (Rechnungsmethoden) von Hobson und einen physikalischen Teil (Meßmethoden) von Diesselhorst. Durch Hinzufügung des letzteren Teiles sollte vermieden werden, daß die Wärmeleitung wie in älteren Darstellungen lediglich als eine Domäne der reinen Mathematiker erscheint. Andrerseits mußte der erste Teil dem Umstande Rechnung tragen, daß sich die fruchtbarsten Methoden der mathematischen Physik gerade an dem Beispiel der Wärmeleitung entwickelt haben. Außer den Fourier-Poissonschen Methoden in ihrer Anwendung auf lineare Wärmeleitung und auf die Randwertaufgaben betr. Kugel, Zylinder, Ellipsoid, kam hier auch die namentlich in England ausgebildete Methode der Quellpunkte zur Darstellung, die verbunden mit der Spiegelungsmethode, allerdings in einem beschränkten Anwendungsgebiet, besonders übersichtliche und einfache Lösungen von Wärmeleitungsproblemen gestattet. In dem zweiten Teil wird auf die erhöhte Bedeutung hingewiesen, welche die Messungsergebnisse der Wärmeleitungskonstanten einerseits (in Verbindung mit der Messung des elektrischen Leitvermögens) für die Theorie der Elektronenbewegung in Metallen und andererseits für technische Zwecke, Durchgang der Wärme durch Heizflächen, beanspruchen. Die in Betracht kommenden Meßmethoden werden hier mit besonderer Vollständigkeit, Kritik und Übersichtlichkeit dargelegt, von den ersten Messungen Péclets an bis zu den jüngst ausgebildeten „Methoden aus dem Berliner physikalischen Institut", auch mit Berücksichtigung der anisotropen Wärmeleitung.

Die technische Thermodynamik hebt in ihrem allgemeinen von M. Schröter bearbeiteten Teil diejenigen Lehrsätze und Methoden der theoretischen Thermodynamik hervor, die zurzeit für das Verständnis technischer Wärmeprozesse besonders in Betracht kommen und gibt dann eine gedrängte Übersicht über die Kreisprozesse der thermodynamischen Maschinen, Dampf-, Gas-, Kältemaschinen etc. Die schon in den Anfängen der Thermodynamik begründeten graphischen Methoden des Indikatordiagramms gewinnen erst in der Technik ihre volle Bedeutung und stellen in der Regel die Dinge am deutlichsten dar; dementsprechend wird auch in dem Artikel Schröter (mit 52 Figuren) auf die Darstellung der graphischen Methoden ein besonderer Nachdruck gelegt.

Sehr viel mehr ins einzelne der Literatur und des Gegenstandes geht Prandtl in dem zweiten speziellen Teile, die strömende Bewegung der

Gase und Dämpfe betreffend. Dieser Gegenstand war für den Dampfmaschinenbau von jeher bedeutsam; er hat aber neuerdings durch die Fortschritte im Turbinenbau außerordentlich an praktischer Bedeutung gewonnen und zugleich durch die besonders auf Stodola fußenden Untersuchungen der letzten Zeit die schönste theoretische Klärung erfahren. Eine volle Bestätigung hat die in diesem Artikel dargelegte Theorie durch neuere Versuche Prandtls (diese Zeitschr. 8, 23, 1907) erhalten.

Der Artikel über chemische Atomistik ist, wie in einer Vorbemerkung der Redaktion ausgeführt wird, zwar mathematisch wenig ergiebig, da es sich hier weniger um aktuelle wie um vorläufig latente mathematische Gesetze — z. B. im periodischen System der Elemente — handelt; trotzdem durfte der Gegenstand wegen seiner Tragweite und grundlegenden Bedeutung in der Enzyklopädie nicht fehlen.

Der erste Teil des Artikels, von F. W. Hinrichsen bearbeitet, behandelt die chemischen Grundgesetze in historischer Darstellung, anknüpfend an die Namen Richter, Proust, Berthollet, Dalton, Gay-Lussac, Avogadro, sowie die Vorstellungen über Valenz, Affinität, Struktur, ferner das periodische System und die verschiedenen Methoden zur Schätzung der Molekülgröße.

Der zweite Teil, von L. Mamlock, berichtet über Stereochemie, vor allem natürlich über diejenige des Kohlenstoffs. Hier werden die elementargeometrischen Konstruktionen am Kohlenstoff-Tetraeder, die Aneinanderlagerung mehrerer Tetraeder zu Reihen und Ringen, die Symmetrieeigenschaften dieser Bildungen und besonders die enantiomorphen Formen in ihrem Zusammenhang mit dem optischen Drehungsvermögen besprochen. Anhangweise werden auch die Versuche zur Ausdehnung stereochemischer Betrachtungen auf Stickstoff, Schwefel, Selen und Zinn besprochen.

Ein kurzer kritischer Beitrag von E. Study sichtet die anschließenden weitergehenden mathematischen Spekulationen auf ihre wirkliche Stichhaltigkeit hin. Es handelt sich hier einmal um die Anwendung der Ausgleichungsrechnung auf die Größe der Atomgewichte (ihre vermutete Ganzzahligkeit und formelmäßige Darstellung), sodann um die Anwendung kombinatorischer oder invariantentheoretischer Methoden im Anschluß an Cayley auf die chemischen Strukturformeln.

Auch der Artikel über Kristallographie rührt von drei Autoren her. Das kristallographische Grundgesetz und seine Anwendung auf die Berechnung und Zeichnung der Kristalle ist von Th. Liebisch in der aus seinen Lehrbüchern bekannten knappen und exakten Darstellung behandelt. Über Symmetrie und Struktur der Kristalle berichtet A. Schönflies; hier handelt es sich um die gruppentheoretische Ableitung der 32 Symmetrieklassen und der 230 Strukturgruppen, wobei außer der älteren Bravaisschen, der Sohnckeschen und der erweiterten Auffassung des Referenten auch die neueren Arbeiten von Fedorow und die Theorie der Kugelpackungen nach Lord Kelvin berücksichtigt werden.

Während diese beiden Teile ihrem Gegenstande und Gedankengange nach mehr mathematisch gehalten sind, untersucht O. Mügge im dritten Teil dieses Artikels die fundamentale physikalische Frage, wieweit sich die Strukturtheorien in der Erfahrung bewähren. Das hierbei zur Verfügung stehende Material ist einstweilen nicht sehr reichhaltig, es dürfte aber in diesem Artikel zum ersten Male kritisch und übersichtlich zusammengestellt sein. Die Prüfung bezieht sich auf die Formen der Kristalle, auf Spaltung, Translationsvermögen, einfache Schiebungen, Zirkularpolarisation und kommt zu dem Ergebnis, daß sich „bisher noch nicht mit Sicherheit erkennen läßt, wieweit das von den Strukturtheorien entworfene Bild der Kristalle der Wirklichkeit entspricht". Dabei wird auf die Wichtigkeit von Untersuchungen über das Wachstum und die Entstehung der Kristalle hingewiesen, die bisher wenig kultiviert sind.

Das vierte Heft des ersten Halbbandes beginnt mit dem Artikel Boltzmanns: Über die kinetische Theorie der Materie und übergibt somit die letzte Arbeit des großen Forschers der Öffentlichkeit. Dieselbe stammt zum Teil noch aus der Leipziger Zeit; der Schluß wurde unter Mitarbeit von Dr. Nabl unmittelbar nach der kalifornischen Reise Sommer 1905 geschrieben, von der Boltzmann seelisch gestärkt zurückkehrte. Der Artikel zeigt daher die Frische der Auffassung und die Lebendigkeit des Ausdrucks, die ihm in den Zeiten seiner Blüte eigen war. In einem Vorwort der Redaktion wird dankbar der besondere Anteil hervorgehoben, den Boltzmann als Mitglied der akademischen Kommission an den Vorbesprechungen über den Plan der Enzyklopädie und an der Wahl der Referenten für den physikalischen Teil derselben genommen hat.

Der Inhalt des Artikels beschränkt sich, wie die Überschrift sagt, nicht auf die kinetische Theorie der Gase, sondern trägt auch im letzten Abschnitte G den Versuchen Rechnung, die kinetische Theorie auf die tropfbaren Flüssigkeiten und die festen Körper auszudehnen. Teil A behandelt die kinetische Bedeutung des Gasdruckes auf mehr elemen-

tarem Wege. Teil B, Wärmegleichgewicht, kritisiert die verschiedenen Beweise des Verteilungsgesetzes der Geschwindigkeiten, erläutert und rechtfertigt das *H*-Theorem sowie die kinetische Bedeutung der Entropie. Teil C behandelt Reibung, Wärmeleitung und Diffusion in Gasen, Teil D ist der umfassenden Zweiten Theorie Maxwells gewidmet. Es folgt ein Abschnitt über die Intramolekularbewegung mit der Berechnung des Verhältnisses der spezifischen Wärmen und ein Bericht über die Van der Waalssche Theorie, die mit Rücksicht auf einen späteren Artikel von Kamerlingh-Onnes über die Zustandsgleichung kürzer gehalten ist, als es im ursprünglichen Plane Boltzmanns lag.

Noch sei hervorgehoben, daß der Artikel keineswegs ein bloßer Auszug aus dem Boltzmannschen Lehrbuche, sondern eine durchaus originale Arbeit ist, die jenes an Präzision und Übersichtlichkeit wohl noch übertrifft und in dem reichen, sorgsam zusammengestellten Literaturnachweis erheblich darüber hinausgeht.

Dasselbe Heft bringt einen Artikel von H. Minkowski über Kapillarität. Er gliedert sich in die beiden Hauptteile „Kapillarität als Flächenenergie" und „Kapillarität als räumlich verteilte Energie". Der erste Teil behandelt die Theorien von Gauß, Fr. Neumann etc., der zweite diejenigen von Laplace, Van der Waals, Gibbs etc. Im ersten Teil kommen die zahlreichen statischen Anwendungen (Steighöhe, Randwinkel, Formen von Tropfen, von Flüssigkeitslamellen) zur Darstellung, sowie die dynamischen Untersuchungen von Lord Kelvin über Kapillarschwingungen, von Lord Rayleigh über das Zerfallen von Flüssigkeitsstrahlen, von Reynolds über den Einfluß der Ölschicht auf Wasserwellen. Im zweiten Teil handelt es sich um die allgemeinen physikalischen Grundlagen des flüssigen Aggregatzustandes, um den Begriff der Kohäsion, die Beziehungen zur Thermodynamik und zur Van der Waalsschen Zustandsgleichung. Der Artikel schließt sich hier namentlich an Gibbs an, berichtet aber auch über eine neuere Theorie von Bakker, der die Fernkräfte der Kohäsion auf Grund eines von van der Waals eingeführten Kohäsionsgesetzes auf Spannungen in den Substanzen zurückführt.

Die Darstellung ist auch in den Beweisführungen bei aller Kürze vollständig; die Begriffe der Variationsrechnung werden nicht vorausgesetzt, sondern deren Methoden auf diejenigen der Differential- und Integralrechnung zurückgeführt. Zweifellos wird hierdurch die Darstellung im Prinzip durchsichtiger und strenger, und es werden auch diejenigen Leser, welche die ungewohnte mathematische Form zunächst befremden möchte, sich bald von ihren inneren Vorzügen überzeugen.

Über die elektrischen Artikel aus dem zweiten Halbbande der Enzyklopädie (Gans, Pockels) werden wir bei nächster Gelegenheit berichten. A. Sommerfeld.

(Eingegangen 18. März 1907.)

Deutscher Kamera-Almanach. Jahrbuch der Amateur-Photographie. Unter Mitwirkung von bewährten Praktikern herausgegeben von F. Loescher. III. Jahrgang. 1907. gr. 8. VIII u. 272 S. mit 1 farbigem Kunstblatt, 46 Vollbildern u. 127 Abbildungen im Text. Berlin, Gustav Schmidt. 1906. M. 3.50, gebunden M. 4.25

Der vorliegende 3. Jahrgang des vornehm ausgestatteten Kamera-Almanachs schließt sich den beiden früheren, in dieser Zeitschrift besprochenen Bänden würdig an. Auch in diesem Jahre wird eine Zahl teils technische, teils ästhetische Fragen behandelnder Originalaufsätze der Amateurwelt reiche Anregung bieten. Die meist recht gut gelungenen Autotypien geben eine vortreffliche Übersicht über die Leistungen der modernen photographischen Künstler, unter denen wir den englischen diesmal entschieden den Preis lassen müssen. Behrendsen.

(Eingegangen 1. Mai 1907.)

Alexander Gleichen, Leitfaden der praktischen Optik. 8. 221 S. mit 158 Abbildungen. Leipzig, S. Hirzel. 1906. M. 5,60, gebunden M. 6,50

Zur Abfassung des vorliegenden Buches hat sich Verfasser in der Absicht entschlossen, „die Grundzüge einer Theorie der optischen Instrumente, die Konstruktion und die Berechnung derselben nur unter Anwendung der ersten Elemente der Algebra darzustellen, um hierdurch einerseits den Bedürfnissen der Praxis entgegenzukommen, andererseits eine Vorstufe zu schaffen für diejenigen, welche die rein mathematisch-theoretischen Werke studieren wollen". Sicherlich wird von vielen Praktikern dieses Unternehmen mit freudiger Dankbarkeit begrüßt werden. Mir will indessen scheinen, als wäre bei der Herstellung des Werkes nicht überall mit der nötigen Sorgsamkeit verfahren worden. Derartig unliebsame Verwechselungen wie zwischen Konvex- und Konkavspiegel (§ 4) wären sonst sicherlich vermieden worden. Auch manche empfindliche sprachliche Härte sowie manch störender Druckfehler hätte bei aufmerksamerer Korrektur ausgemerzt werden können. Noch eine Bemerkung allgemeiner Art sei mir hier gestattet: die Einführung der Bezeichnung φ für die Brennweite wird vom

Physiker als störend empfunden. Die Bezeichnungsweise f ist allgemein üblich, und außerdem ist in den Vorschlägen zur Einführung einheitlicher Formelzeichen vorgesehen worden, Strecken — und um eine Strecke handelt es sich hier doch! — durchgehends mit kleinen Buchstaben des lateinischen Alphabets zu bezeichnen. Eine genaue Einhaltung dieser Vorschläge würde das Studium vieler Arbeiten ganz wesentlich erleichtern, und damit würde der Allgemeinheit ein großer Dienst geleistet werden. Falls wirklich in einzelnen Sondergebieten noch abweichende Bezeichnungsweisen gang und gäbe sein sollten, so würden sich die betreffenden Fachschriftsteller durch Verzicht auf solche „Reservate" großes Verdienst erwerben. Max Iklé.

Wilhelm Brüsch, Die Beleuchtungsarten der Gegenwart. (Aus Natur und Geisteswelt, 108. Bändchen.) kl. 8. II u. 164 S. mit 155 Abbildungen im Text. Leipzig, B. G. Teubner. 1906. Geheftet M. 1,—, gebunden M. 1,25, Geschenkausgabe M. 2,50

Aus einer Reihe von vierzehn Vorträgen, die der Verfasser im Jahre 1903 in Lübeck bei verschiedenen Gelegenheiten gehalten hat, ist das vorliegende Büchlein entstanden. Trotzdem sein Ursprung bereits soweit zurückliegt, ist es doch keineswegs veraltet. Vielmehr haben alle neueren Beleuchtungsarten, die inzwischen erfunden oder verwertet worden sind, bei einer gründlichen Durcharbeitung des Manuskriptes eingehende Beachtung gefunden. Das Werkchen ist daher durchaus geeignet, dem Laien einen Überblick über den Stand der modernen Beleuchtungstechnik zu geben, und ihm einiges Verständnis für das Wesen der verschiedenen Beleuchtungsarten zu vermitteln.

Man könnte vielleicht versucht sein, dem Verfasser eine gewisse Einseitigkeit und Parteilichkeit vorzuwerfen, weil die Erzeugnisse mancher Firmen in dem Buch sehr eingehende, die anderer Fabrikanten nur kurze Behandlung gefunden haben. Dieser Vorwurf trifft indessen durchaus nicht den Verfasser, sondern höchstens die Firmen, deren Fabrikate nur kurz gestreift worden sind. Leider scheuen sich viele, selbst unserer leistungsfähigsten Firmen immer noch in kurzsichtiger Ängstlichkeit, Vortragenden und Autoren das für ihre Arbeiten erbetene ausführliche Material an Modellen und Abbildungen zur Verfügung zu stellen, ein Umstand, der schon manchem das Arbeiten sehr erschwert hat. Max Iklé.

J. J. van Laar, Sechs Vorträge über das thermodynamische Potential und seine Anwendungen auf chemische und physikalische Gleichgewichtsprobleme. Eingeleitet durch zwei Vorträge über nichtverdünnte Lösungen und über den osmotischen Druck. gr. 8. VIII u. 119 S. Braunschweig, F. Vieweg & Sohn. 1906. M. 3.50, gebunden M. 4.20

Über den Wert des thermodynamischen Potentials braucht sich der Berichterstatter hier nicht zu verbreiten, besitzt doch die deutsche Literatur der Thermodynamik ausgezeichnete Darstellungen derselben auf dieser Grundlage. van Laar aber ist Fanatiker des thermodynamischen Potentials und die anschaulichen Vorstellungen der Theorie der verdünnten Lösungen sind ihm ein Greuel. Leider hat letztere aber immer noch Anhänger, während die epochemachenden Entdeckungen des Herrn van Laar nicht nach seinen Wunsche gewürdigt werden. Wer sich über die Ausschweifungen der „verdünnten Schule" zu orientieren wünscht, sich an einer rhetorischen Abschlachtung des osmotischen Druckes laben möchte, der wird in den einleitenden Vorträgen auf seine Kosten kommen. Daß auch in den weiteren Vorträgen ein reichlich subjektiver Standpunkt hinsichtlich der Wahl des Stoffes und seiner Behandlung gewahrt wird, dürfte niemand verwundern; bis zu einem gewissen Grade bedeutet derartige Eigenart a auch etwas Empfehlenswertes. E. Bose.

(Eingegangen 11. Juni 1907.)

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Darmstadt Dr. Max Gasser für Geodäsie, an der Universität Greifswald Dr. Julius Herweg für Physik, an der Technischen Hochschule Zürich Dr. K. Schild für Physik und Dr. J. Schmidlein für allgemeine und organische Chemie.

Ernannt: Der Konservator an der Münchener Sternwarte Professor Dr. Karl Oertel zum o. Professor der Geodäsie an der Technischen Hochschule zu Hannover, der a. o. Professor der Chemie Dr. E. Erlenmeyer in Straßburg zum Kais. Regierungsrat und Mitglied der Biologischen Anstalt für Land- und Forstwirtschaft in Berlin, der außerordentliche Professor der Chemie an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Roland Scholl zum ord. Professor und Direktor des Chemischen Instituts an der Universität Graz.

Gestorben: In England der Chemiker Dr. August Dupré (aus Mainz).

Gesuche.

Für das **Physikalische Institut** der **Technischen Hochschule** zu Darmstadt werden zum Herbst d. J. zwei

Assistenten

(promovierte Physiker) **gesucht.** Bewerbungen sind zu richten an

Prof. Dr. K. Schering,
Darmstadt, Hochschul-Straße 2.

Für die Redaktion verantwortlich Professor Dr. Emil Bose in Oliva bei Danzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.